

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear



**TURBULENCIA INDUCIDA POR ONDAS DE DERIVA EN
PLASMAS DE FUSIÓN: INFLUENCIA DE LA DIFUSIÓN
COLISIONAL EN LAS PROPIEDADES NO LOCALES Y
NO MARKOVIANAS DEL TRANSPORTE**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Ángel Mier Maza

Bajo la dirección de los doctores
Luis García Gonzalo y Luis Raúl Sánchez Fernández

Madrid, 2008

• **ISBN: 978-84-692-1022-2**

©Ángel Mier Maza, 2008

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR

TURBULENCIA INDUCIDA POR ONDAS DE DERIVA EN PLASMAS DE FUSIÓN.

**Influencia de la difusión colisional en las propiedades
no locales y no Markovianas del transporte.**

Memoria presentada por

José Ángel Mier Maza

*para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas*

Dirigida por:

Dr. Luis García Gonzalo

Catedrático de Física de la Escuela Politécnica Superior
Departamento de Física
Universidad Carlos III de Madrid

Dr. Luis Raúl Sánchez Fernández

Profesor Titular de Física de la Escuela Politécnica Superior
Departamento de Física
Universidad Carlos III de Madrid

Madrid, Febrero de 2008

A mis padres

Índice

| | |
|--|-------------|
| Agradecimientos | xvii |
| Resumen | xix |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. La fusión termonuclear | 2 |
| 1.2. Condiciones para la fusión | 4 |
| 1.2.1. Balance de energía y criterio de Lawson | 4 |
| 1.3. Métodos de confinamiento del plasma | 6 |
| 1.4. Configuraciones magnéticas | 6 |
| 1.4.1. Superficies magnéticas | 7 |
| 1.4.2. Breve historial de las configuraciones magnéticas | 8 |
| 1.4.3. Tokamak | 8 |
| 1.4.4. Stellarator | 10 |
| 1.5. Condiciones de equilibrio y estabilidad | 11 |
| 1.5.1. Magnetohidrodinámica | 11 |
| 1.5.2. Efecto de la resistividad | 14 |
| 1.5.3. Equilibrio | 14 |
| 1.5.4. Estabilidad | 15 |
| 1.6. Transporte en plasmas de fusión | 15 |
| 1.6.1. Transporte clásico y neoclásico | 15 |
| 1.6.2. Transporte anómalo | 17 |
| 1.7. Inestabilidades en el núcleo de los dispositivos | 18 |
| 1.7.1. Inestabilidades DTEM | 18 |
| 2. Ondas de deriva. | |
| Modelo y ecuación DTEM | 19 |
| 2.1. Introducción a las ondas de deriva | 19 |
| 2.1.1. Movimientos de partículas cargadas en un plasma | 21 |
| 2.1.2. Geometría | 24 |
| 2.1.3. Mecanismo de las Ondas de Deriva | 24 |
| 2.2. Modelo DTEM | 30 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 2.2.1. | Suposiciones y aproximaciones | 31 |
| 2.2.2. | Campo magnético | 32 |
| 2.2.3. | Equilibrio | 33 |
| 2.2.4. | Término “ $i\delta$ ” | 33 |
| 2.2.5. | Inversión explícita de la ecuación de Boltzmann modificada | 35 |
| 2.2.6. | Ecuación de continuidad iónica y ecuación DTEM | 35 |
| 2.2.7. | Energía fluctuante | 38 |
| 2.2.8. | Evolución del perfil promedio | 38 |
| 3. | Análisis lineal | 41 |
| 3.1. | Cantidades de equilibrio | 41 |
| 3.2. | Desarrollo de las autofunciones lineales | 44 |
| 3.3. | Aproximación local | 45 |
| 3.3.1. | Solución para el problema de autovalores | 46 |
| 3.4. | Resultados lineales | 50 |
| 3.4.1. | Resultados analíticos bajo la aproximación local | 50 |
| 3.4.2. | Resultados numéricos. | 53 |
| 4. | Esquema numérico | 57 |
| 4.1. | Integración espacial | 57 |
| 4.1.1. | Integración angular. Método espectral | 58 |
| 4.1.2. | Integración radial. Diferencias finitas | 58 |
| 4.1.3. | Condiciones de contorno | 59 |
| 4.2. | Integración temporal | 60 |
| 4.2.1. | Tratamiento implícito y explícito | 60 |
| 4.2.2. | Algoritmo de integración | 61 |
| 4.2.3. | Condiciones iniciales | 62 |
| 4.3. | Difusividad numérica e hiperviscosidad | 63 |
| 4.3.1. | Difusividad numérica | 63 |
| 4.3.2. | Hiperviscosidad | 63 |
| 4.4. | Estabilidad y precisión numérica | 65 |
| 5. | Interacción entre los canales de transporte turbulento y difusivo | 69 |
| 5.1. | Turbulencia GD y FD | 70 |
| 5.2. | Mecanismo de desestabilización turbulento | 72 |
| 5.2.1. | Superficies racionales y transporte por avalanchas | 72 |
| 5.3. | Criticalidad Auto-Organizada | 73 |
| 5.3.1. | Autosimilaridad | 74 |
| 5.3.2. | Criticalidad Auto-Organizada y transporte por avalanchas | 75 |
| 5.4. | Procesos de transporte a favor de la hipótesis SOC | 75 |
| 5.5. | Un sistema SOC sencillo: El montón de arena | 76 |
| 5.6. | Ecuaciones del modelo DTEM completo | 78 |

| | |
|---|------------|
| 5.6.1. Ecuación para las fluctuaciones | 79 |
| 5.6.2. Ecuación para el perfil | 79 |
| 5.7. Canal de transporte difusivo | 79 |
| 5.8. Determinación numérica del umbral de inestabilidad | 82 |
| 5.9. Dinámica del transporte con difusión. | |
| CASO I: $\tilde{S}(r, t) = 0$ | 85 |
| 5.9.1. Efecto de borde en la interacción entre los canales turbulento y difusivo. | 88 |
| 5.10. Dinámica del transporte con difusión. | |
| CASO II: $\tilde{S}(r, t) \neq 0$ | 88 |
| 5.10.1. Función de autocorrelación | 94 |
| 5.10.2. Análisis R/S | 95 |
| 5.10.3. Espectro de potencia | 97 |
| 5.10.4. Tiempo de confinamiento y difusividad efectiva | 98 |
| 5.10.5. Interpretación | 100 |
| 6. Difusión fraccionaria: un modelo de transporte para plasmas de fusión | 103 |
| 6.1. Difusión anómala | 104 |
| 6.1.1. El Continuous Time Random Walk | 105 |
| 6.1.2. Límite fluido del CTRW: Ecuaciones Diferenciales Fraccio- narias | 107 |
| 6.2. Obtención de las trayectorias | 110 |
| 6.2.1. Inicialización del cálculo | 111 |
| 6.3. Escalas espacio-temporales | 111 |
| 6.3.1. Escalas espaciales | 112 |
| 6.3.2. Escalas temporales | 114 |
| 6.4. Determinación numérica de los exponentes fraccionarios | 119 |
| 6.4.1. Escalado de los desplazamientos radiales promedio en fun- ción del tiempo | 121 |
| 6.4.2. Velocidades Lagrangianas | 124 |
| 6.4.3. Evolución del propagador | 127 |
| 6.4.4. Distribución de los vuelos | 128 |
| 6.4.5. Interpretación | 130 |
| Conclusiones y cuestiones abiertas | 133 |
| 6.5. Conclusiones | 133 |
| 6.6. Cuestiones abiertas | 135 |
| Apéndice A. Procesos Gaussianos y procesos de Markov | 137 |
| A.1. Procesos Gaussianos | 137 |
| A.2. Procesos de Markov | 138 |

| | |
|---|------------|
| Apéndice B. Distribuciones de Lévy | 141 |
| B.1. Distribuciones de Lévy extremas | 142 |
| B.2. Momentos de las distribuciones de Lévy | 142 |
| B.3. Expresiones explícitas de las distribuciones de Lévy | 142 |
| Apéndice C. Operadores diferenciales fraccionarios | 143 |
| Bibliografía | 145 |
| Publicaciones | 151 |

Índice de figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1. | Sección eficaz de distintas reacciones de fusión en función de la energía cinética de los núcleos ($1 \text{ barn} \equiv 10^{-30} \text{ m}^2$). | 3 |
| 1.2. | Esquema del diseño de un tokamak. | 9 |
| 1.3. | Distribución de las bobinas modulares del stellarator Wendelstein 7-X y aspecto de la superficie de flujo más externa. | 10 |
| 2.1. | Esferas de Debye generadas por la presencia de dominios de carga. La longitud de Debye λ_D estima el rango espacial máximo en el que pueden existir tales dominios. A partir de dicha longitud el plasma puede ser considerado neutro. | 20 |
| 2.2. | Analogía entre las geometrías cilíndrica (a) y toroidal (b). | 25 |
| 2.3. | (a) Esquema de una onda de deriva en un cilindro. Se trata de una perturbación de densidad (línea ondulada según la dirección poloidal y líneas discontinuas según la dirección toroidal). El rectángulo está ampliado en (b), donde se muestra el mecanismo físico de una onda de deriva. Figura tomada de [31]. | 26 |
| 2.4. | Respuesta inicial en dirección paralela. | 27 |
| 2.5. | Efecto de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ en una zona con gradiente de densidad. | 27 |
| 2.6. | Efecto de la deriva diamagnética en zonas con gradiente de campo magnético paralelo (a) y antiparalelo (b) al gradiente del perfil de densidad. | 29 |
| 2.7. | Esquema de una onda de deriva. Los contornos de $\phi = \text{const}$ en el plano perpendicular a \mathbf{B} son las líneas de flujo de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ alrededor del máximo de potencial. El pequeño desfase δ entre la fluctuación de densidad y la correspondiente al potencial hace que la primera adelante a la segunda según la dirección de propagación (y). | 30 |
| 3.1. | Perfiles de equilibrio normalizados de densidad y temperatura, así como del factor de seguridad en función del radio normalizado. | 42 |
| 3.2. | Perfiles de equilibrio de las longitudes características de densidad, temperatura y shear magnético en función del radio normalizado. | 43 |

| | |
|--|----|
| 3.3. Perfiles de equilibrio de las velocidades sónica iónica y de deriva diamagnética (a) y de las frecuencias de deriva diamagnética, de colisión iónica y de colisión efectiva de los electrones atrapados (b). | 43 |
| 3.4. Perfiles de los coeficientes del término fuente $D_{\text{eff}}(r)$ y disipativo c_s^2/ν_i para los modos DTEM. | 44 |
| 3.5. Geometría slab (izquierda), y su relación con la geometría toroidal en torno a la posición radial $r = r_s$ (derecha). | 46 |
| 3.6. (a) Autofunciones solución (parte real) del problema de autovalores para el modo $(m, n) = (3, 2)$ en función del número de onda radial. (b) Autofunciones solución (parte real) del problema de autovalores para diferentes modos (m, n) , con número de onda radial $l = 0$ | 51 |
| 3.7. Tasas de crecimiento analíticas (puntos azules) y frecuencias de rotación analíticas (triángulos rojos) en función del número de onda poloidal m | 52 |
| 3.8. Tasas de crecimiento (a) y frecuencias de rotación (b) en función del número de onda radial l , para el modo angular $(m, n) = (27, 18)$. | 53 |
| 3.9. (a) Comparativa entre las soluciones analítica y numérica para las partes real e imaginaria de la autofunción solución del problema de autovalores para el modo angular $(m, n) = (15, 10)$. (b) Comparativa entre las soluciones analítica y numérica para las tasas de crecimiento y frecuencias de rotación en función del número de onda poloidal. | 54 |
| 3.10. Tasas de crecimiento y frecuencias de rotación en función del número de onda poloidal para las tres helicidades principales. | 55 |
| 3.11. (a) Tasas de crecimiento y (b) frecuencias de rotación en función del número de onda poloidal sin flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_S = 0$) y con flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_S = 0.2$). | 56 |
| 3.12. (a) Módulos de la autofunción lineal solución del problema de autovalores sin flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_S = 0$) y con flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_S = 0.2$). (b) Idem. para la parte imaginaria de la solución | 56 |
| 4.1. En la parte superior se muestra el intervalo de separación entre puntos del mallado en función del radio. En la parte inferior se muestra una sección toroidal donde está resaltada la zona de la isla. | 59 |
| 4.2. Estructura radial de la componente de Fourier $(m, n) = (33, 22)$ durante la fase no lineal en dos simulaciones con una única helicidad. La figura con triángulos se corresponde al caso sin difusión radial mientras que la figura con círculos tiene difusión radial. | 64 |

| | | |
|-------|--|----|
| 4.3. | Espectros de energía para la helicidad $(m,n)=(3,2)$ durante la fase cuasilineal en dos simulaciones. Los círculos se corresponden a un caso sin hiperviscosidad mientras que para los cuadrados se ha introducido hiperviscosidad. | 65 |
| 4.4. | (a) Energía fluctuante para diferentes valores del paso temporal. (b) Energía fluctuante para diferentes valores del paso radial. (c) Energía fluctuante para diferente número de armónicos de Fourier. . | 67 |
| 5.1. | Esquema del proceso de aplanamiento del perfil de densidad debido a la excitación de modos inestables. | 73 |
| 5.2. | (a) Distribución radial de las superficies racionales y (b) diagrama $m - n$. En ambos casos se resaltan las tres helicidades principales incluidas en el cálculo. | 74 |
| 5.3. | La línea roja representa la distribución radial del coeficiente de difusión definido a trozos. En azul se muestra el mismo coeficiente definido con ayuda de tangentes hiperbólicas. (Los valores numéricos en la gráfica no están a escala con los utilizados en las simulaciones). . | 81 |
| 5.4. | Esquema de los diferentes regímenes en los que puede permanecer el perfil de densidad en función de su inestabilidad global. | 82 |
| 5.5. | Mapa de color en el plano $(t-r)$ del nivel de fluctuaciones de la densidad sin difusividad ($D_{\text{ext}} = 0$). | 83 |
| 5.6. | (a) Perfiles de densidad inicial y relajado con $D_{\text{ext}} = 0$ y (b) evolución temporal del nivel de fluctuaciones de la densidad sin difusividad. . | 84 |
| 5.7. | Perfiles radiales de L_n . Puntos: cálculo analítico para cada modo individual (lineal). Línea negra discontinua: Spline del cálculo analítico, tomando como valor crítico para cada superficie racional el máximo. Línea roja: Perfil de L_n obtenido a partir de la densidad inicial de equilibrio. Línea azul: Perfil de L_n obtenido a partir del perfil de densidad relajado en estado estacionario sin fuente ($L_{n_{\text{nl}}}^c$). | 85 |
| 5.8. | Mapa de colores en el plano $(t-r)$ del nivel de fluctuaciones de la densidad para seis valores distintos de la difusividad externa sobre el perfil. Los valores numéricos son: (a) $D_0 = 0$, (b) $D_0 = 10^{-9} \text{ a}^2 \Omega_i$, (c) $D_0 = 3 \times 10^{-9} \text{ a}^2 \Omega_i$, (d) $D_0 = 10^{-8} \text{ a}^2 \Omega_i$, (e) $D_0 = 3 \times 10^{-8} \text{ a}^2 \Omega_i$ y (f) $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ | 86 |
| 5.9. | (a) Perfiles de densidad inicial (línea roja) y relajado para diferentes valores de D_0 . (b) Evolución temporal del nivel de fluctuaciones para los valores de D_0 vistos en (a). | 87 |
| 5.10. | Nivel de saturación para las fluctuaciones en función de D_0 | 87 |
| 5.11. | Perfiles de densidad. Línea roja: perfil inicial. Línea verde: perfil relajado con $D_0 = 0$. Línea azul: perfil relajado con alta difusividad. El perfil se mantiene congelado en los intervalos $r < r_{\text{in}}$ y $r > r_{\text{ex}}$. Línea magenta: perfil relajado con alta difusividad. El perfil es libre. . | 89 |

| | |
|---|-----|
| 5.12. Mapa de colores en el plano ($t-r$) de (a) la densidad acumulada promedio con $D_0 = 0$, (b) la densidad acumulada promedio con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, (c) la raíz cuadrática media de la densidad fluctuante con $D_0 = 0$ y (d) la raíz cuadrática media de la densidad fluctuante con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, en presencia de la fuente externa fluctuante \tilde{S} | 90 |
| 5.13. Series temporales de la “actividad turbulenta” $g(t)$. (a) $D_0 = 0$, (b) $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$ | 92 |
| 5.14. (a) Promedio de $g(t)$ en función de D_0 . También se muestran los límites asintóticos inferior ($D_0 = 0$, línea discontinua azul) y superior ($D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, línea discontinua roja). (b) Desviación estándar de $g(t)$ en función de D_0 . La línea discontinua representa el límite asintótico para $D_0 = 0$. (c) Desviación estándar relativa. | 93 |
| 5.15. Función de autocorrelación para diferentes valores de D_0 | 94 |
| 5.16. (a) Análisis R/S de las señales $g(t)$ para diferentes valores de D_0 . También se señala la región autosimilar. (b) Estimaciones del parámetro de Hurst mediante el ajuste lineal de los rangos reescalados en el intervalo autosimilar en función de D_0 . La línea roja discontinua representa $H = 0.5$ | 96 |
| 5.17. (a) Espectros de potencia de la actividad turbulenta $g(t)$ para diferentes valores de D_0 . (b) Espectros de potencia superpuestos para difusividades baja y alta respectivamente. | 98 |
| 5.18. Dependencia radial de la difusividad efectiva, D_{tur} , sin difusividad y con alta difusividad. | 99 |
| 6.1. Espacio paramétrico $\alpha - \beta$ para la Ec. (6.14). | 109 |
| 6.2. Mesoescala. | 111 |
| 6.3. (a) Proyección según las tres direcciones del cilindro (planos $X = 0$, $Y = 0$ y $Z = 0$) de los contornos de densidad fluctuante. (b)–(c) Proyección sobre el plano $Z = 0$ de los contornos de densidad fluctuante con $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$ respectivamente. | 113 |
| 6.4. (a) Distribuciones radiales del nivel de fluctuaciones de densidad (caso $D_0 = 0$) en el plano $\zeta = 0$ para las posiciones poloidales $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$ respectivamente. (b) Funciones de autocorrelación radial para las cuatro señales en (a). | 114 |
| 6.5. Velocidades Eulerianas. En (a) y (b) se muestran las componentes radial y poloidal en una misma posición con $D_0 = 0$. En (c) y (d) se muestran las componentes radial y poloidal en una misma posición con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$ | 116 |
| 6.6. Velocidades Lagrangianas. En (a) y (b) se muestran las componentes radial y poloidal con $D_0 = 0$. En (c) y (d) se muestran las componentes radial y poloidal con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$ | 117 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.7. | Funciones de autocorrelación promedio para las series de velocidades (a) Eulerianas y (b) Lagrangianas. En ambos casos están representadas las componentes radial y poloidal para $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$. | 118 |
| 6.8. | (a) Cantidad de tracers que permanecen dentro de los límites de integración en función del tiempo, $N_{\text{in}}(t)$, para diferentes valores de D_0 . (b) Idem, en escala semi-logarítmica. | 119 |
| 6.9. | Primer y segundo momentos de los desplazamientos radiales promedio de los tracers en función del tiempo. | 122 |
| 6.10. | (a) Producto $n\nu(n)$ en función del momento de orden n de la distribución de los desplazamientos radiales promedio. (b) Escalado de ν con el momento de orden n | 123 |
| 6.11. | PDF promedio de las series de velocidades Lagrangianas para diferentes valores de la difusividad sobre el perfil de densidad. | 125 |
| 6.12. | Análisis R/S de las series de velocidades Lagrangianas. Se representa en cada caso la cantidad $H \sim \frac{\tau}{R/S} \frac{d(R/S)}{d\tau}$ | 126 |
| 6.13. | Evolución de la PDF de los desplazamientos radiales de los tracers respecto a su posición inicial. (a) $D_0 = 0$ en escala decimal. (b) PDFs rescaladas en escala log-log para $D_0 = 0$ (sólo se representan las cinco últimas y el ajuste a una Lévy). (c) $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ en escala decimal. (d) PDFs rescaladas en escala log-log para $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ (sólo se representan las cinco primeras y el ajuste a una Gaussiana). | 127 |
| 6.14. | PDFs de los vuelos para diferentes valores de la difusividad sobre el perfil de densidad. | 129 |

Índice de tablas

| | |
|---|-----|
| 5.1. Analogía entre el sandpile y un plasma confinado magnéticamente. . | 77 |
| 6.1. Escalas temporales básicas. | 115 |
| 6.2. Valores típicos promedio de la velocidad Euleriana. | 115 |
| 6.3. Valores típicos promedio de la velocidad Lagrangiana. | 117 |
| 6.4. Valores numéricos de los exponentes fraccionarios y de transporte en función de D_0 | 131 |

Agradecimientos

Esta memoria ha sido realizada en el Departamento de Física de la Universidad Carlos III de Madrid, gracias a la ayuda y ánimo de muchas personas. A todas ellas les quisiera mostrar mi gratitud.

A Luis García y a Raúl Sánchez les agradezco su labor como directores de este trabajo, sus consejos y su paciencia. Sin ellos no hubiera sido posible obtener un resultado científicamente original.

A Ramón y a Antonio les agradezco la amistad que siempre me brindan. Al primero, además, le agradezco sus indicaciones y supervisión cuando cualquier problema relacionado con la física del plasma y la fusión se me ha planteado, aunque su quehacer como consejero siempre ha ido mucho más allá. A Antonio le agradezco su paciencia y las gratas conversaciones mantenidas, sobre todo cuando se daban entre cervezas y Four Roses.

A María y a Raúl les agradezco sobre todo la amistad, aunque también el gran apoyo que de ellos he recibido, como su acogida en Oak Ridge que fue inmejorable.

Al resto de personas que forman el Departamento de Física, mi agradecimiento por haber contribuido a crear un ambiente de amistad y compañerismo en el que tan a gusto siempre me he sentido, así como por la amable predisposición mostrada ante cualquier problema. Una de las personas más implicadas en ese sentido era Daniel, que desgraciadamente ya no está con nosotros. Aun así, siempre permanecerá en nuestro recuerdo, como un gran amigo y mejor persona. Tampoco me olvido de mis compañeros de despacho, de los técnicos de laboratorio, de los de “la cueva” y del resto de la “planta noble”, en particular los “freaks”.

Fuera del Departamento de Física, pero incluidos en la Universidad, no puedo dejar de agradecer a mis compañeros del equipo de baloncesto su amistad y compañerismo, sobre todo a Toño “el segurata”, único que aguantó todas las ligas y copas habidas y por haber, a pesar de sus rodillas, y a Kike, gran base, gran persona y gran maestro del arte culinario (al menos para mi).

Por supuesto, queda mucha más gente del resto del campus: de otros departamentos, de seguridad, del polideportivo, de las cafeterías, de conserjería, de la limpieza, etc. Quiero dejar patente mi agradecimiento a todos ellos por su labor dentro de la universidad, que contribuye a que los que en ella trabajamos lo hagamos a gusto y con todo tipo de comodidades.

Fuera del ámbito de la Universidad, agradezco a mi amigo Diego su apoyo y comprensión, además de los tantísimos buenos momentos juntos.

Finalmente, como no podía ser de otra manera, mi agradecimiento a toda mi familia. De manera particular he de agradecer a mis padres, hermanas, sobrina, sobrino y cuñado su constante ánimo, apoyo y dedicación, sobre todo en los malos momentos, así como la alegría que siempre me proporcionan.

Espero no haber olvidado incluir a mucha gente que debiera estar, pero conocedor de mi despiste, quienes lean estos agradecimientos y no se encuentren, que me perdonen por la falta de rigor y que tengan por seguro que se los daré en persona.

J.A.M.M.

Madrid, Febrero de 2008.

Resumen

Un plasma de fusión confinado magnéticamente está sujeto a una serie de inestabilidades, generadas como consecuencia de su estado fuera del equilibrio termodinámico, que producen turbulencia e inducen transporte radial neto hacia fuera del dispositivo que lo mantiene, con el consiguiente deterioro del confinamiento. Esta situación tiene graves consecuencias a la hora de conseguir generar energía eléctrica de manera rentable a través de estos plasmas. Por ello, el estudio de modelos teóricos de turbulencia en plasmas ayuda a entender la naturaleza de este transporte y puede ayudar a indicar el camino que es necesario seguir para minimizar estas pérdidas y alcanzar la meta final: la producción rentable de energía de fusión en la Tierra.

Tradicionalmente, las predicciones sobre la magnitud del transporte turbulento en plasmas confinados magnéticamente se hacían desde la perspectiva de la teoría de campo medio. Según esto, la dinámica del transporte se describe mediante flujos promedio y coeficientes de transporte locales como, por ejemplo, difusividades efectivas. Bajo esta aproximación de campo medio y transporte local, se aplica la regla de la longitud de mezcla para los coeficientes de transporte turbulento, $D \sim \gamma/k^2$, presuponiendo tácitamente que existen ciertas escalas espaciales (k) y temporales (γ) a partir de las cuales se puede caracterizar el proceso global de transporte. Sin embargo, la aparición de ideas como la Criticalidad Auto-Organizada (SOC¹) ha supuesto un cambio radical respecto a las teorías de campo medio. El marco de ideas SOC supone una dinámica de transporte sin escalas espacio-temporales características. No existen eventos de transporte característicos o privilegiados. Su espectro es invariante bajo cambios de escala, abarcando cualquier posibilidad dentro de los márgenes límite establecidos por el tamaño del sistema y la duración total.

Existe abundante evidencia experimental que sugiere la necesidad de explorar enfoques como el SOC u otros semejantes para lograr una comprensión más profunda del transporte turbulento en estos plasmas, que parece claramente tener un carácter no difusivo. Como ejemplos de observaciones experimentales, podemos citar la observación directa de estructuras tipo avalancha en el tokamak DIII-D (San Diego, USA), la detección de efectos de memoria de largo alcance (en contraste,

¹Del inglés, Self-Organized Criticality.

la difusión clásica carece de memoria alguna) en datos experimentales de fluctuaciones medidas en el borde de varios tokamaks y stellarators (incluyendo el heliac TJ-II del CIEMAT, Madrid, y el tokamak JET en Oxford, UK), y la observación de propiedades estadísticas en flujos turbulentos medidos con sondas que sugieren la inexistencia de escalas características (que se revelan en forma de estadísticas de leyes de potencia, no Gaussianas). En el plano teórico, simulaciones numéricas con diferentes modelos de turbulencia fluida han revelado también la existencia de transporte no difusivo, avalanchas y efectos de memoria.

En este trabajo se presenta el estudio detallado de las propiedades de estabilidad y transporte de uno de estos modelos: el de un plasma confinado magnéticamente en geometría cilíndrica, en el que se excitan modos asociados a turbulencia de baja frecuencia tipo onda de deriva (*drift wave* en inglés). En concreto, se trata de los llamados *Dissipative Trapped Electron Modes* (DTEM). Los detalles sobre este tipo de turbulencia se discutirán más adelante. Este modelo no ha sido estudiado con anterioridad en este contexto, sin embargo, dos han sido los motivos principales que nos han llevado a elegirlo: 1) el hecho de que se cree que las ondas de deriva (de las que existen muchos tipos, no sólo el aquí tratado) pueden ser las responsables de gran parte del transporte turbulento observado experimentalmente en estos plasmas; 2) el que este modelo sea particularmente sencillo, ya que basta considerar una ecuación que controla la evolución de las fluctuaciones de densidad en el plasma más una ecuación que controla la evolución del perfil de densidad promedio, vital para poder observar avalanchas y dinámicas tipo SOC (de hecho, el acoplo con esta ecuación promedio es una parte novedosa de este trabajo, ya que nunca antes se habían realizado simulaciones de este tipo con un modelo DTEM). La simplicidad es crucial en este caso, puesto que se traduce en un código más simple con el que es posible conseguir y realizar simulaciones numéricas lo suficientemente largas como para poder observar y estudiar la dinámica tipo SOC antes mencionada en un periodo de tiempo razonable.

Los objetivos del trabajo aquí presentado son, por tanto, el estudio y la caracterización de la dinámica SOC del modelo DTEM en diferentes contextos. Inicialmente mostraremos cómo las propiedades SOC del modelo son similares a las ya observadas en simulaciones que consideraban otros tipos de turbulencia (como la turbulencia generada por modos de intercambio o ITG). Este hecho sirve para reforzar aún más la idea, central en el marco de las teorías tipo SOC, de que la dinámica a largos tiempos y distancias del sistema no está determinada por los detalles (por ejemplo, el tipo de turbulencia), sino por la presencia de los acoplos adecuados entre los distintos actores dinámicos del sistema (en este caso, las fluctuaciones y la evolución del perfil promedio). Pasaremos después a centrarnos en lo que constituye el objetivo principal del trabajo: estudiar el efecto que tiene sobre la dinámica SOC la coexistencia de la turbulencia con un canal difusivo clásico (como por ejemplo, la difusión neoclásica asociada a colisiones en el plasma, cuya

existencia es conocida experimentalmente). El origen y relevancia de esta cuestión viene dada por la reciente conclusión de varios autores de que, cuando se incluye dicho canal difusivo, las propiedades típicas de los sistemas SOC desaparecen. Esta conclusión ha sido sugerida por simulaciones de turbulencia tipo onda de deriva, pero generada por gradientes de temperatura iónica. El tipo de turbulencia, como ya se dijo, no juega un papel central en esta discusión, al menos a nivel cualitativo. En este trabajo mostraremos que dicha conclusión es incorrecta al haber identificado como propiedades características de un estado SOC algunas que no han de estar necesariamente presentes. Por ejemplo, tradicionalmente se ha asociado SOC con la presencia de espectros de potencia tipo $1/f$ en las fluctuaciones y con la presencia de perfiles promedio subcríticos (es decir, estables) a pesar de que dan lugar a transporte neto. Mostraremos en esta memoria que estas propiedades no son necesarias para el establecimiento de dinámicas tipo SOC y que, siempre que el canal difusivo sea subdominante respecto al turbulento, el sistema sigue exhibiendo propiedades relacionadas con la autosimilaridad y correlaciones temporales de los sistemas críticos tipo SOC.

De confirmarse la relevancia del transporte sin escalas (no local, no Markoviano) inherente a las ideas SOC en el contexto de estos plasmas, se plantea entonces la pregunta de cual es el modelo matemático capaz de capturar y describir esta situación correctamente. Parece claro que debe ser algo diferente a las ecuaciones diferenciales de tipo difusivo, ya que éstas asumen la existencia de escalas características asociadas al proceso de transporte. Entre los formalismos matemáticos que son capaces de describir transporte sin escalas (también llamado transporte autosimilar o transporte fraccionario), nosotros consideraremos dos: los *Continuous Time Random Walks* (CTRW) y las ecuaciones diferenciales fraccionarias². Los primeros son generalizaciones del *random walk* o *camino aleatorio* (estudiado ya por Einstein para entender el transporte difusivo) que evitan tener que asumir la existencia de escalas privilegiadas. Las ecuaciones fraccionarias son ecuaciones de transporte que se obtienen al tomar el límite fluido (largas distancias, largos tiempos) de los CTRWs. Estas ecuaciones contienen derivadas no enteras o fraccionarias. Veremos que este hecho pone a este tipo de ecuaciones en una situación claramente ventajosa frente a la ecuación de difusión clásica, puesto que los operadores diferenciales fraccionarios utilizan los valores de la función en todos los puntos (son operadores integro-diferenciales) mientras que los operadores de diferenciación de orden entero utilizan sólo los valores locales de la función. Así, los primeros son idóneos a la hora de modelar el transporte en máquinas de fusión, que como se sabe y se corroborará en este trabajo, es no local y no Markoviano.

La memoria está estructurada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se hace una breve introducción al problema de la fusión termonuclear controlada, presentándose los métodos de confinamiento, las configuraciones principales, las con-

²Para designarlas se suele utilizar las siglas FDE (Fractional Differential Equations).

diciones de equilibrio/estabilidad dentro del marco de la Magnetohidrodinámica (MHD), y el problema del transporte. En el capítulo 2 se explica el mecanismo físico que origina las ondas de deriva y se establece la ecuación de fluido (ecuación de continuidad) para un caso particular de ondas de deriva: el modelo de turbulencia DTEM. En el capítulo 3 se resuelve el problema lineal. Para ello se establecen las cantidades de equilibrio y se realiza el desarrollo de Fourier de las autofunciones lineales. Bajo la aproximación local el problema se convierte en una ecuación de autovalores para las fluctuaciones, de cuya solución obtenemos la relación de dispersión, que nos dará la información completa de las ondas o modos de Fourier linealmente estables o inestables. También se resuelve el problema numéricamente, constituyendo esto un primer test acerca del funcionamiento del código utilizado, por comparación con los resultados analíticos. El esquema numérico utilizado en la resolución de las ecuaciones se describe en el capítulo 4. La implementación numérica se basa en un código ya existente, modificado para resolver las ecuaciones DTEM. Se analizarán aspectos relacionados con la resolución espacial y temporal en el proceso de integración y se discutirá el empleo de distintas herramientas numéricas necesarias para evitar inestabilidades en los resultados y llegar a un compromiso entre exactitud y coste computacional.

Una vez comprobado el correcto funcionamiento del código numérico, en el capítulo 5 se analizan los cambios producidos en el transporte cuando se varía la intensidad relativa de los canales difusivo y turbulento. Se muestra que para valores significativamente altos de la difusividad, el sistema sigue exhibiendo todas las propiedades típicas de sistemas SOC.

En el capítulo 6 se postula un modelo de difusión fraccionaria. En su construcción, se estimará el valor de los índices correspondientes a los operadores de diferenciación y por consiguiente se caracterizará el tipo de dinámica que rige el transporte de partículas en el plasma, tanto a nivel temporal como espacial. Para ello, se estudiará la evolución de partículas test (tracers), cuyas series de velocidades Lagrangianas serán calculadas a partir del campo de velocidad Euleriano del plasma. Veremos cómo los modelos de difusión fraccionaria pueden ser aplicados a la diagnosis y descripción del transporte en aquellos regímenes en los que no existen escalas características (y también cuando existan, puesto que la ecuación de difusión estándar y el random walk son casos particulares de estas construcciones).

Finalmente, se resumen los resultados de este trabajo y se extraen las principales conclusiones. También se exponen las posibles líneas futuras de investigación.

A lo largo de esta memoria se ha intentado utilizar siempre términos en castellano. En los casos en que esto no ha sido posible, se ha empleado el término anglosajón correspondiente.

Los valores numéricos de las magnitudes físicas vienen expresados en general en unidades del sistema internacional salvo la temperatura, que se expresará en unidades de energía ($1 \text{ eV} = 1.16 \times 10^4 \text{ K}$).

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, una de las consecuencias del aumento de la demanda energética, así como de las limitaciones de los recursos energéticos, es la necesidad de buscar otras fuentes de energía. Además, el aumento de la mentalidad ecológica sugiere la producción de energía de forma no contaminante, de manera que no se emitan gases de efecto invernadero tales como el dióxido de carbono, posibles responsables del calentamiento global. Así, la producción de energía suficiente sin daño para el equilibrio ecológico será en el futuro uno de los objetivos a conseguir por la humanidad. Hoy día, las fuentes de energía más explotadas son los combustibles fósiles: petróleo, carbón y gas natural, sumando entre ellos más del 80 % del suministro mundial. Debido a que son recursos no renovables y altamente contaminantes, no son buenos candidatos para el abastecimiento masivo en un futuro. Por otra parte, las energías renovables son hoy por hoy poco eficientes y están, por diversos motivos, poco implantadas, lo que hace que no estén en un buen lugar de cara al abastecimiento futuro. Fuentes de energía renovable como la hidráulica, la eólica o la solar son alternativas limpias, pero que no pueden formar la base para el abastecimiento futuro a gran escala, debido a las grandes fluctuaciones en la producción sujetas al clima y a la situación geográfica. El uso de la energía de fisión tiene la ventaja de no producir CO_2 , pero tiene los inconvenientes asociados a la seguridad de los reactores de fisión, como pueden ser los riesgos de fugas radiactivas y el tratamiento de los residuos radiactivos de larga vida que se generan como producto de las reacciones.

Un firme candidato para la producción masiva de energía en un futuro es la fusión nuclear. A diferencia de la fisión, un reactor de fusión no presenta el problema de los residuos radioactivos de larga vida y el combustible es prácticamente inagotable, a diferencia del Uranio cuyas reservas se agotarán durante los próximos 100 años¹. Aunque en los reactores de fusión también se producen materiales radiactivos como consecuencia de la activación neutrónica, éstos son de corta vida

¹Tomando como referencia el funcionamiento y consumo de reactores convencionales.

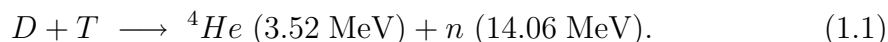
($\lesssim 100$ años). Además, este tipo de energía no emite gases de efecto invernadero, a diferencia de las energías basadas en combustibles fósiles. Sin embargo, aún no se ha llegado a obtener energía de fusión de forma eficiente ya que para ello se deben solucionar una serie de problemas tanto a nivel científico como tecnológico.

El proyecto ITER² [1] tratará de demostrar la viabilidad científica y tecnológica de la energía de fusión (con fines pacíficos). Así, el objetivo de su construcción será el de conseguir la información necesaria que lleve en un futuro a la construcción de una planta de fusión nuclear comercial. Para ello, ITER debería producir más energía de la que consume, cosa que hasta la fecha no ha conseguido ningún reactor de este tipo.

1.1. La fusión termonuclear

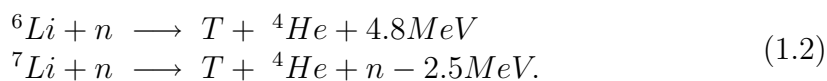
La fusión nuclear consiste en la unión de dos núcleos de elementos ligeros dando lugar a otro más pesado. Durante el proceso se libera una cantidad de energía³ dada por la ecuación de Einstein, $E = mc^2$, que relaciona la energía liberada con la diferencia de masas entre el núcleo fundido y los reactivos. Un ejemplo de este tipo de procesos lo tenemos en las estrellas. En ellas se producen reacciones de fusión nuclear como consecuencia de las intensas fuerzas gravitatorias a las que están sometidos los núcleos que componen el plasma. Como resultado, se libera una cantidad ingente de energía. Los estudios en fusión por confinamiento magnético tratan de reproducir esas reacciones propias de las estrellas de manera controlada para conseguir energía.

De las posibles reacciones de fusión, hay una que es más eficiente desde el punto de vista energético ya que presenta mayor sección eficaz, alcanzando además su máximo a menor temperatura (Fig. 1.1). Tiene como reactivos los dos isótopos del hidrógeno, deuterio (D) y tritio (T) y como productos de reacción se generan una partícula alfa (núcleo de Helio, ${}^4\text{He}$) y un neutrón de alta energía [2]:



La mayor parte de la energía se la lleva el neutrón ($\sim 80\%$), mientras que la energía restante va a la partícula alfa.

En nuestro planeta el deuterio es abundante, puesto que el 0.015 % del agua es agua pesada, D_2O . Por el contrario, el tritio apenas existe en estado natural pues es radiactivo con una vida media de aproximadamente 12 años y por tanto debe ser producido. Para ello se aprovechan los neutrones de las reacciones de fusión que al combinarse con litio generan tritio,



²Del inglés, **I**nternational **T**hermonuclear **E**xperimental **R**eactor.

³Esta energía se manifiesta en forma de energía cinética de los productos de la reacción.

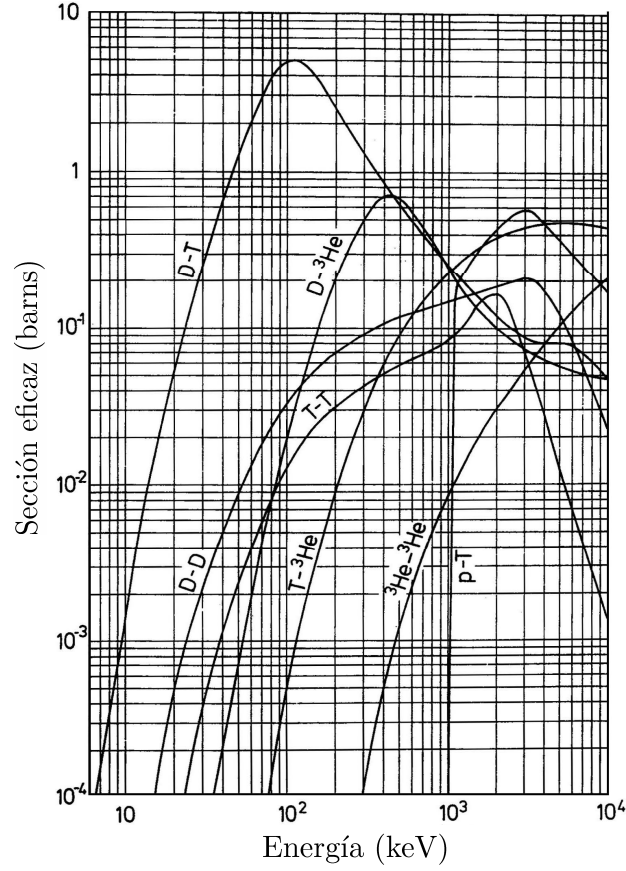
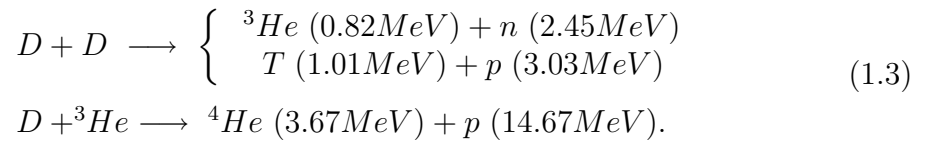


Figura 1.1: Sección eficaz de distintas reacciones de fusión en función de la energía cinética de los núcleos ($1 \text{ barn} \equiv 10^{-30} \text{ m}^2$).

El litio natural (92.5 % ${}^6\text{Li}$ y 7.5 % ${}^7\text{Li}$) es un elemento abundante en la corteza terrestre.

La reacción (1.1) no es la única posible. De hecho, es de esperar que en una segunda generación de reactores se puedan alcanzar las condiciones necesarias para que las reacciones deuterio-deuterio, más difíciles de conseguir ya que su sección eficaz es menor, puedan ser aprovechadas,



En este caso no sería necesario generar tritio ya que es uno de los productos de las propias reacciones de fusión. Sin embargo, dadas las extremas condiciones de densidad y temperatura necesarias para estas reacciones, una primera generación estaría basada en la reacción deuterio-tritio.

En un reactor de fusión los neutrones se absorberán en una cobertura generadora de tritio o manto fértil que envolverá la parte central del reactor y que contendrá el litio que se transformará en tritio y helio. El espesor del manto deberá ser lo suficientemente grande para frenar los neutrones energéticos producidos por las reacciones de fusión. De esta manera el manto aumentará su temperatura y el calor generado podrá ser aprovechado para producir electricidad.

1.2. Condiciones para la fusión

Los núcleos atómicos tienden a repelerse debido a que están cargados positivamente, lo que hace que la fusión sólo pueda darse bajo condiciones de temperatura y densidad muy elevadas para así poder compensar las fuerzas electrostáticas. Si la temperatura es lo suficientemente elevada, la energía cinética de los núcleos será tal que podrán superar la barrera de repulsión culombiana y podrán fusionarse. Un efecto análogo produce aumentar la densidad, ya que se obliga a los núcleos a estar cada vez más próximos, lo que facilita el proceso de fusión.

Las temperaturas que se requieren para obtener una tasa significativa de fusiones en la reacción deuterio-tritio son del orden de decenas de kiloelectronvoltios⁴ (KeV), equivalentes a cientos de millones de grados Kelvin. A estas temperaturas los átomos se disgregan en sus componentes, electrones y núcleos, formándose un plasma. El problema que se presenta es el confinamiento. Cualquier recipiente en contacto con el plasma sufrirá un grave deterioro y enfriará el plasma. La solución viene en forma de campos magnéticos ya que las partículas cargadas siguen las líneas de campo. Así, una configuración de líneas de campo cerradas podrá, en principio, confinar un plasma sin que sea necesario un recipiente en contacto directo con él.

1.2.1. Balance de energía y criterio de Lawson

Para que un reactor sea eficiente, debe obtenerse más energía de las reacciones de fusión que la empleada en calentar el combustible y hacer funcionar el sistema, teniendo en cuenta las pérdidas que se producen debido a la radiación (bremsstrahlung) y al transporte de calor y partículas. Por tanto, el plasma deberá reunir unas condiciones de densidad y temperatura tales que la tasa de energía generada en las reacciones de fusión compense a la necesaria en mantener el sistema.

Para un plasma de densidad n y temperatura T , la densidad de energía térmica es $3nT$, que disminuye debido a la conducción del calor y a la pérdida de partículas. Se puede definir el tiempo característico del proceso de pérdida de energía, τ , como

⁴En el campo de la fusión, la temperatura suele expresarse en términos de energía, de forma que $1 \text{ eV} = 1.16 \times 10^4 \text{ K}$.

el cociente entre la densidad de energía térmica y la densidad de potencia perdida por conducción de calor y partículas, P_{cp} ,

$$\tau = \frac{3nT}{P_{cp}}. \quad (1.4)$$

Este tiempo así definido es una medida del tiempo de confinamiento de la energía, ya que puede considerarse que el plasma sólo está confinado durante el tiempo τ . Si además tenemos en cuenta las pérdidas por radiación, P_r , tenemos que la tasa total de pérdidas será $P_{cp} + P_r$.

Lawson [3] estableció la condición que establece la energía que un plasma de fusión debe producir para compensar la energía eléctrica que se invierte en mantenerlo (condición de breakeven),

$$P_{cp} + P_r = \eta (P_F + P_{cp} + P_r). \quad (1.5)$$

P_F es la densidad de potencia generada en las reacciones de fusión. El miembro de la izquierda representa las pérdidas, que son compensadas por la energía eléctrica total que se puede extraer, representada en el miembro de la derecha, teniendo en cuenta la eficiencia en el proceso de conversión de energía térmica en energía eléctrica, $\eta \sim 1/3$. La relación (1.5) se puede reescribir como,

$$n\tau \geq f(T), \quad (1.6)$$

donde $f(T)$ es una función de la temperatura que para la reacción $D - T$ tiene un mínimo en torno a $T = 20$ keV cuyo valor, para $\eta = 1/3$, es de $\sim 4 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}\text{s}$.

La condición de breakeven no es suficiente ya que un reactor debe funcionar en régimen de ignición. En este régimen, ya no será necesario calentamiento adicional puesto que las partículas α serán las encargadas de mantener la temperatura. La condición de ignición se expresa,

$$P_{cp} + P_r = P_\alpha, \quad (1.7)$$

que es equivalente a la condición de Lawson para $\eta = 0.136$ [4]. Para la reacción deuterio-tritio, la condición de ignición en términos del producto $n\tau$ a la temperatura óptima (10 – 20 keV) es,

$$n\tau \geq 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}\text{s}. \quad (1.8)$$

El factor 5 de diferencia es debido a que en cada reacción de fusión, sólo un 20 % de la energía se la lleva la partícula α , encargada de calentar el plasma. El 80 % restante se la lleva el neutrón.

En resumen, para que un reactor sea eficiente, deberá contener un plasma de densidad y temperatura lo suficientemente altas, confinado por un tiempo lo suficientemente largo.

1.3. Métodos de confinamiento del plasma

Para satisfacer los requerimientos del criterio de Lawson se puede escoger entre tiempos de confinamiento pequeños y densidades grandes, o tiempos de confinamiento grandes y densidades moderadas. En el primer caso se obtienen plasmas muy calientes confinados por su propia masa. Es el llamado confinamiento inercial. En el segundo caso, para mantener al plasma confinado durante tiempos mucho más largos se emplean campos magnéticos, pues éstos actúan sobre las partículas cargadas que forman el plasma. Es el llamado confinamiento magnético.

En el primero de ellos el plasma se expande libremente, por lo que los tiempos de confinamiento son muy pequeños, $10^{-12} - 10^{-8}$ s. Así, para cumplir el criterio de Lawson será necesario llegar a densidades del orden de $10^{32} - 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Para ello, se irradia una pequeña pastilla compuesta de deuterio y tritio con haces láser de muy alta potencia o con haces de partículas de muy alta energía. Esto hace que la capa externa de la pastilla se evapore y se expanda rápidamente, comprimiendo el resto del combustible (acción y reacción). Al ser comprimida y calentada, cada pastilla se transforma en una pequeña bomba termonuclear. Este tipo de confinamiento presenta el problema de la iluminación homogénea de las pastillas para que la onda de choque se propague correctamente hacia el centro y produzca el consiguiente aumento de la densidad. Además, debido al interés militar de los láseres de alta potencia, el acceso a la información existente en esta línea de trabajo se encuentra muy restringido.

El confinamiento magnético consiste en introducir el plasma en una vasija en la que se generan campos magnéticos intensos que impiden su expansión libre. En este caso las densidades típicas son del orden de 10^{20} m^{-3} , por lo que para verificar el criterio de Lawson se tienen que conseguir tiempos de confinamiento del orden del segundo. El problema en este caso es que los plasmas termonucleares no están en equilibrio térmico, por lo que son inestables. Las inestabilidades internas dan lugar al llamado transporte anómalo, que origina grandes pérdidas de energía y partículas y por consiguiente limita el tiempo de confinamiento.

1.4. Configuraciones magnéticas

Nos centraremos en el confinamiento magnético del plasma, es decir, se utilizarán configuraciones de campo magnético cerradas para poder confinar las partículas del plasma en una región acotada del espacio. Debido a que el campo magnético es solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), las líneas de campo van a infinito o se cierran sobre sí mismas. En el segundo de los casos, las ecuaciones de Maxwell y otros requisitos de estabilidad exigen que las configuraciones no puedan ser arbitrarias. Una primera aproximación para el confinamiento del plasma es utilizar una configuración puramente toroidal. En este caso se producen derivas diferenciales por efecto

del campo magnético inhomogéneo⁵ que generan transporte de partículas hacia el exterior debido a la aparición de campos eléctricos [4]. Para evitar esto se añade una componente poloidal a la configuración magnética, cortocircuitando en parte los campos eléctricos y minimizando las pérdidas. Bajo ciertas condiciones de simetría, la suma de las dos componentes (toroidal y poloidal) genera superficies magnéticas, que son superficies toroidales formadas al seguir una línea de campo durante muchos giros. Como no pueden cortarse, la configuración tridimensional será topológicamente equivalente a un conjunto de toroides anidados en torno a una superficie central, que ya no será una superficie sino una curva denominada eje magnético.

1.4.1. Superficies magnéticas

Para entender la topología de las superficies magnéticas es útil visualizar las secciones de Poincaré, que se construyen intersectando un plano sobre la distribución espacial del campo magnético. Supongamos que estamos en el caso sencillo de una configuración magnética toroidal con simetría axial alrededor del eje mayor. Si el campo magnético confinante se genera mediante bobinas de sección circular, cualquier sección de Poincaré será un punto debido a la ausencia de componente poloidal. Introduciendo un campo poloidal, las líneas se retuercen formando trayectorias helicoidales. En este caso se dan dos posibilidades. La primera de ellas es que las líneas de campo recubran ergódicamente una superficie de topología toroidal (superficie magnética), en cuyo caso el diagrama de Poincaré consistirá en una curva cerrada (circunferencia). Pero también es posible que una línea de campo se cierre sobre sí misma después de un número determinado de giros, en cuyo caso la línea no recubrirá ergódicamente la superficie toroidal. A tal superficie se le denomina superficie racional y se caracteriza porque el diagrama de Poincaré está formado por una serie de puntos, tantos como giros toroidales efectúa la línea hasta que se cierra sobre sí misma. A medida que nos acercamos al centro geométrico del toroide, el volumen que encierran las superficies magnéticas se va haciendo menor hasta que se anula, correspondiendo esto último al eje magnético. Se define la transformada rotacional, ι , como el ángulo girado según la dirección poloidal al completar un giro toroidal a lo largo de una línea magnética. Este parámetro da una medida del arrollamiento de las líneas. Otro parámetro relacionado es $\epsilon = \iota/2\pi$, que representa los giros poloidales de la línea magnética cuando se completa un ciclo toroidal. Cuando se cumpla $\epsilon = m/n$ siendo m y n enteros, estaremos ante una superficie racional puesto que la línea magnética se cerrará sobre sí misma al completar m giros poloidales y n toroidales. Por el contrario, si ϵ no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros, la superficie será irracional.

⁵Las ecuaciones de Maxwell imponen que para una geometría toroidal el campo debe decaer en proporción inversa de la distancia al eje magnético, $B_t \sim 1/R$.

1.4.2. Breve historial de las configuraciones magnéticas

El comienzo de la investigación básica en el campo de la fusión termonuclear se sitúa después de la segunda guerra mundial, en los Estados Unidos, la antigua Unión Soviética y el Reino Unido, de forma secreta. A principios de la década de los 50, de forma simultánea, se comenzaron a estudiar tres conceptos distintos en laboratorios diferentes. En Princeton se desarrolló el stellarator [5], de la mano de Spitzer. En Los Álamos y en el Reino Unido se investigaron los Z y θ -pinch [6] y en Livermore los espejos magnéticos [7]. Los soviéticos Tamm y Sakharov idean el tokamak⁶ [8] y al final de esa década los proyectos dejan de ser secretos y se empieza a tener un intercambio de ideas muy constructivo, lo que permite valorar las cualidades y defectos de cada configuración, iniciándose la colaboración internacional. Así, los experimentos de confinamiento magnético posteriores se desarrollaron a partir de aquellos iniciales, sobre todo en la línea tokamak, debido a que mostraron resultados superiores a los obtenidos en los otros dispositivos estudiados.

Lo que diferencia básicamente a los diferentes tipos de candidatos a reactor de fusión es la forma de generar las superficies magnéticas, concretamente, el campo poloidal, siendo en la actualidad las dos líneas de investigación principales el tokamak y el stellarator.

1.4.3. Tokamak

Un método para generar el campo magnético poloidal es mediante una corriente toroidal que fluye en el interior del propio plasma. Esto se consigue por efecto transformador, haciendo actuar al plasma como secundario (ver Fig. 1.2). La corriente toroidal, además, se utiliza para calentar el plasma resistivamente (calentamiento óhmico). Por tratarse de un dispositivo axisimétrico, su geometría es básicamente bidimensional: la configuración magnética varía en el plano perpendicular al eje magnético. El hecho de que la corriente se genere por efecto transformador tiene la desventaja de que el sistema no puede mantener la corriente toroidal indefinidamente por métodos puramente inductivos. El funcionamiento es pulsado. Además, las grandes corrientes que circulan (del orden de Mega-amperios) son fuentes de inestabilidad, pudiéndose generar disrupciones [9] en las que el confinamiento desaparece súbitamente y el calor y las partículas del plasma escapan hacia la pared, deteriorando los materiales de la misma.

El dispositivo de mayor tamaño y que mejores resultados ha aportado hasta ahora es el tokamak JET⁷ [10], en Inglaterra. Ha conseguido obtener plasmas de grado termonuclear y ha alcanzado condiciones próximas al breakeven.

⁶Acrónimo en ruso de cámara toroidal en bobinas magnéticas.

⁷Del inglés, Joint European Torus.

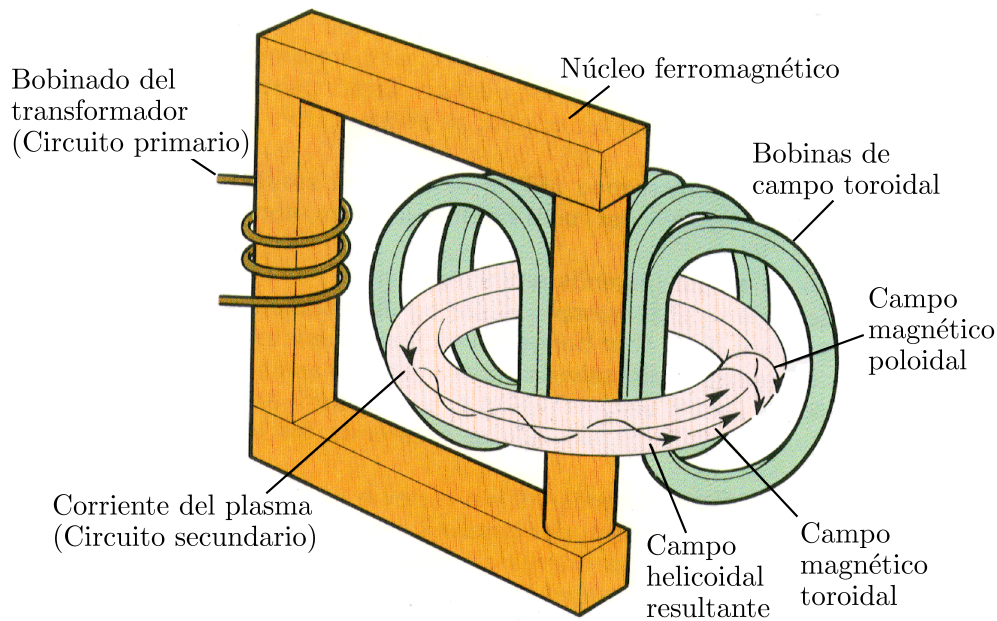


Figura 1.2: Esquema del diseño de un tokamak.

Con el proyecto ITER, un tokamak que está previsto comience a funcionar en Cadarache (Francia) a partir de 2016, se pretende demostrar la viabilidad científica y tecnológica de la energía de fusión termonuclear con objetivos pacíficos. Para verificar estos objetivos ITER debe demostrar una alta amplificación de potencia Q (razón de la potencia de fusión a la potencia de calentamiento auxiliar) en plasmas de deuterio-tritio con una duración suficientemente larga (prácticamente en estado estacionario) demostrando tecnologías esenciales de un reactor en un sistema integrado y llevando a cabo pruebas sistemáticas de los componentes necesarios para soportar las altas cargas de calor de un reactor de fusión y de los componentes nucleares adecuados. De forma más específica, los objetivos de ITER serán:

1. Obtener plasmas inductivos con amplificación de potencia $Q > 10$.
2. Demostrar operación en estado estacionario con $Q > 5$. En principio, no se excluye alcanzar la ignición ($Q = \infty$).
3. Integrar las tecnologías esenciales para un reactor de fusión, como pueden ser bobinas superconductoras, mantenimiento remoto, etc.
4. Realizar tests de los componentes de un futuro reactor, así como de los componentes básicos relativos al manto y la producción de tritio en el mismo.

1.4.4. Stellarator

Cuando el campo magnético poloidal es generado con la ayuda de bobinas y no mediante corrientes en el plasma, el dispositivo se denomina stellarator, que constituyó el primer intento de confinamiento de un plasma en dispositivos toroidales. Al no ser necesarias las corrientes inducidas en el plasma, puede funcionar en modo continuo, siendo esta su principal ventaja frente a los tokamaks. Se evitan así las inestabilidades inherentes a la existencia de corrientes, principalmente las disrupciones. Otra característica es su versatilidad, pues es posible variar externamente las corrientes en las bobinas, cambiando así fácilmente la configuración magnética. Por contra, precisan de sistemas auxiliares de calentamiento al carecer del calentamiento óhmico de que disponen los tokamaks. Otro inconveniente es la complejidad geométrica inherente a su tridimensionalidad, que conlleva una gran dificultad a la hora de diseñar componentes como las bobinas. La topología de los campos magnéticos es tan complicada que es muy difícil crear superficies magnéticas con buenas propiedades de equilibrio y estabilidad en estos dispositivos. Esta es, quizá, la razón principal por la que los resultados iniciales no fueron tan esperanzadores como en el tokamak, decantándose la comunidad científica desde un principio en favor de este último. Experimentalmente, los tokamak están una generación por delante de los stellarators, aunque en los últimos años han recibido un fuerte impulso, debido en gran medida al aumento en la capacidad de cálculo de superordenadores que posibilitan complejos cálculos de configuraciones magnéticas. Ejemplos de stellarator son el LHD [11] en Japón, el Wendelstein 7-X [12] (Fig. 1.3), en Alemania y el TJ-II [13] en España.

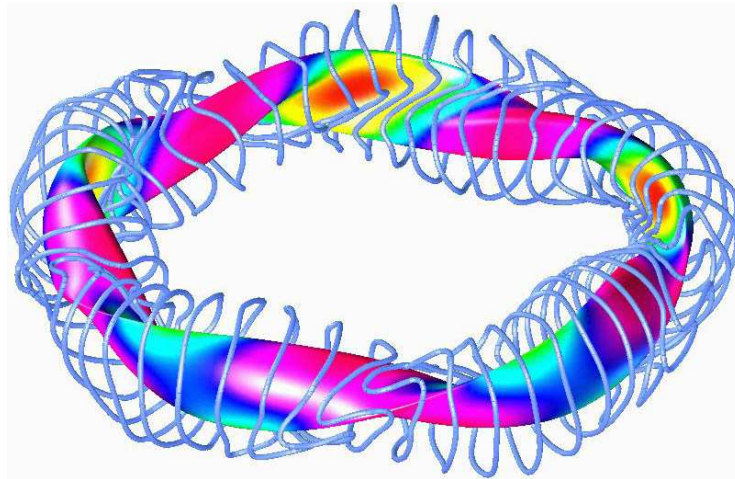


Figura 1.3: Distribución de las bobinas modulares del stellarator Wendelstein 7-X y aspecto de la superficie de flujo más externa.

1.5. Condiciones de equilibrio y estabilidad

Dada la complejidad que conlleva el estudio de las propiedades físicas de un plasma, es necesario buscar simplificaciones. El modelo más general para la descripción de la interacción plasma-campo es la teoría cinética, que describe la evolución microscópica de la función de distribución $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ de cada especie del plasma en presencia de campos electromagnéticos. En general, la función de distribución dependerá de la coordenada espacial, de la velocidad y del tiempo. El subíndice α representa cada una de las especies. La ecuación que rige dicha evolución es la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{col}}. \quad (1.9)$$

Según la descripción de Boltzmann, existen dos tipos de fuerzas actuando sobre las partículas. Por un lado están las fuerzas de Lorentz de largo alcance, $q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, en donde los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se calculan a partir de las corrientes y densidades de carga promedio y por otro lado están las fuerzas debidas a interacciones de corto alcance o colisiones, representadas por el miembro de la derecha en (1.9).

Tomando los diferentes momentos sobre la velocidad \mathbf{v} en la ecuación de Boltzmann se obtienen las ecuaciones de evolución de las diferentes magnitudes macroscópicas que definen el plasma: densidad, velocidad, presión, etc. Se genera así una jerarquía infinita de ecuaciones ya que cada una introduce una nueva incógnita. Es necesario trunca para poder cerrar la jerarquía y quedarnos con un número finito de ecuaciones.

1.5.1. Magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica (MHD) es un modelo en el que se trunca la jerarquía al segundo orden. Trata la dinámica macroscópica de un fluido eléctricamente neutro compuesto por partículas cargadas que responden a la presencia de campos electromagnéticos. Abarca por tanto las ramas de la dinámica de fluidos y el electromagnetismo. Dentro de la MHD existen básicamente dos modelos distintos. La MHD ideal y la resistiva. En el primero de los casos se supone que cada una de las especies del plasma puede ser tratada como un fluido perfecto, de forma que los efectos de resistividad, viscosidad y conductividad térmica son despreciables. Las ecuaciones de la MHD se deducen a partir de la ecuación de Boltzmann (1.9) y de las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Para derivar las ecuaciones de la MHD se han de tomar los sucesivos momentos (masa, momento y energía) de la ecuación de Boltzmann,

$$\begin{aligned} \int Q_i \left[\frac{df_\alpha}{dt} - \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{col}} \right] d\mathbf{v} &= 0, \quad i = 1 - 3, \\ Q_1 &= 1, \quad Q_2 = m_\alpha \mathbf{v}, \quad Q_3 = \frac{1}{2} m_\alpha v^2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

obteniéndose las ecuaciones de fluido para cada especie,

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha}{dt} + n_\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha &= 0, \\ n_\alpha m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} - q_\alpha n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha &= \mathbf{R}_\alpha, \\ \frac{3}{2} n_\alpha \frac{dT_\alpha}{dt} + \mathbb{P}_\alpha : \nabla \mathbf{v}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{h}_\alpha &= Q_\alpha, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 e (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (n_i - n_e), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde se ha supuesto que la carga de los iones es la del electrón cambiada de signo, $q_i = -q_e = e$. Las cantidades n_α y \mathbf{v}_α son la densidad macroscópica y la velocidad fluida de cada especie respectivamente,

$$\begin{aligned} n_\alpha(\mathbf{r}, t) &\equiv \int f_\alpha d\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{1}{n_\alpha} \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

\mathbb{P}_α es el tensor de presiones, \mathbf{R}_α representa la transferencia media de momento entre partículas distintas debido a la fricción de las colisiones, \mathbf{h}_α es el flujo de calor debido al movimiento aleatorio y Q_α el calor generado debido a colisiones entre partículas distintas.

La serie de Ecs. (1.12) es exacta, aunque no muy útil ya que los momentos de orden superior permanecen presentes en las cantidades \mathbb{P}_α , \mathbf{R}_α , \mathbf{h}_α y Q_α .

Para poder llegar a las ecuaciones finales de la MHD se han de hacer una serie de aproximaciones que eliminen la información relativa a fenómenos de alta frecuencia y corta longitud de onda. Estas aproximaciones se cumplen cuando lo que se considera es el comportamiento macroscópico del plasma.

La primera de las aproximaciones es la consideración de las ecuaciones de Maxwell para fenómenos de baja frecuencia, lo que se consigue haciendo $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. Así,

la corriente de desplazamiento, $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ y la carga $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ pueden ser despreciadas. La primera de las suposiciones implica que las ondas electromagnéticas de interés tengan velocidades de fase mucho menores que la de la luz y que las velocidades térmicas sean no relativistas. La segunda de las suposiciones restringe el estudio a fenómenos con frecuencias características mucho menores que la frecuencia electrónica del plasma y longitudes características mucho mayores que la longitud de Debye.

La suposición $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \rightarrow 0$ implica $n_e = n_i \equiv n$, es decir, cuasineutralidad. Esto no implica que \mathbf{E} o $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, simplemente lo que tiene que cumplirse es que el campo eléctrico sea tal que se preserve la neutralidad de carga.

La segunda aproximación consiste en suponer que la inercia electrónica es despreciable, es decir, $m_e \rightarrow 0$. Esto implica que la respuesta electrónica es infinitamente rápida en escalas temporales típicas de la MHD.

Puesto que $m_e \rightarrow 0$ y que $n_i = n_e \equiv n$, se define la densidad de masa, $\rho = m_i n$. De igual forma, el momento del fluido recae sobre los iones, por lo que la velocidad fluida quedará $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$. La densidad de corriente será proporcional a la diferencia de velocidades entre los fluidos electrónico e iónico $\mathbf{J} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$. Finalmente, quedan por definir la presión y temperatura totales, $p = nT = p_i + p_e$ y $T = T_i + T_e$.

Con todo esto, las ecuaciones de la MHD quedan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) p + \Gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

siendo $\Gamma \equiv c_p/c_v$ la razón entre los calores específicos y η la resistividad. Esta serie de ecuaciones se corresponde con la ecuación de continuidad, el balance de momentos, la ecuación de estado para la presión, la ley de Ohm y la ley de Ampère respectivamente. Por tanto, el modelo MHD conserva masa, momento y energía.

La diferencia entre la MHD ideal y la resistiva está en la consideración que se haga sobre la resistividad del plasma. Bajo la aproximación de un plasma perfectamente conductor, $\eta \rightarrow 0$, estaremos en el caso ideal, mientras que si $\eta \neq 0$ estaremos en el caso resistivo.

1.5.2. Efecto de la resistividad

Si sustituimos la ley de Ohm [cuarta ecuación de la serie (1.14)] en la ley de Faraday [primera ecuación de la serie (1.10)] obtenemos, en el caso ideal,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.15)$$

El flujo magnético a través de una superficies arbitraria será $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. La propiedad más notable de la MHD ideal es que el flujo magnético a través de cualquier elemento de superficie moviéndose con el plasma es constante [14],

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (1.16)$$

El flujo se conserva, tanto local como globalmente. Si la superficie elegida es la de un tubo muy fino, se llega a la conclusión de que las líneas de campo tienen que estar congeladas con el plasma, es decir, no se pueden mover respecto de él puesto que ello implicaría una variación del flujo magnético. Desde el punto de vista fluido, esta restricción lleva a la conclusión de que la topología magnética no puede cambiar si los procesos físicos están regidos por la MHD ideal.

La inclusión de la resistividad hace que el problema cambie radicalmente puesto que ahora las líneas de campo dejan de estar adheridas al plasma. Esto genera procesos en los que se modifica la topología del campo magnético como la reconexión o la difusión de las líneas de campo, dando lugar a una nueva variedad de posibles fenómenos en el plasma.

1.5.3. Equilibrio

Para buscar el equilibrio magnetostático, impondremos que las ecuaciones de la MHD se cumplan bajo las condiciones $\mathbf{v} = 0$ y $\partial/\partial t = 0$, por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

La primera de las ecuaciones representa el balance entre la fuerza de expansión dada por el gradiente de presión que tiende a restablecer el equilibrio termodinámico del plasma y la fuerza de Lorentz que tiende a mantenerlo siguiendo las líneas de campo. La segunda de las ecuaciones es la ley de Ampère, que relaciona el campo magnético con la corriente y la tercera garantiza que el campo magnético sea solenoidal.

1.5.4. Estabilidad

Una vez determinado el equilibrio del plasma, es preciso estudiar su evolución frente a una perturbación arbitraria. El primer paso será buscar modos linealmente inestables que crezcan exponencialmente. Existen básicamente dos métodos para realizar esta tarea. El primero de ellos consiste en introducir pequeñas perturbaciones a todas las cantidades, linealizar en las amplitudes de las perturbaciones, representar la evolución temporal en términos de una exponencial $e^{-i\omega t}$ y resolver las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para el autovalor ω . Presenta la desventaja de tener que resolver complicadas ecuaciones en derivadas parciales, pero tiene la ventaja de dar con las autofunciones exactas. Así, con las ecuaciones linealizadas se puede obtener una relación de dispersión que nos permita estimar los modos inestables.

En el caso de la MHD ideal, existe otro método para encontrar modos inestables. Como se acaba de ver en la sección 1.5.2, en un plasma perfectamente conductor el flujo magnético está congelado con el plasma, por lo que perturbaciones electromagnéticas y fluidas están relacionadas. En concreto, pueden ser descritas por el desplazamiento ξ de los elementos de fluido, como consecuencia de la perturbación al equilibrio. Evaluando la evolución de un determinado funcional (relacionado con la energía del sistema) frente a los desplazamientos ξ compatibles, se determina la estabilidad o inestabilidad del equilibrio.

1.6. Transporte en plasmas de fusión

Uno de los principales problemas que se presentan a la hora de confinar un plasma de fusión es el transporte de calor y partículas. Analizar cuáles son los mecanismos que deterioran el confinamiento y caracterizarlos en función de los diferentes parámetros de funcionamiento es el objetivo del estudio del transporte. En nuestro caso, como acabamos de ver, supondremos que existe un equilibrio magnetohidrodinámico del plasma a partir del cual estudiaremos las propiedades de estabilidad.

Un plasma confinado no puede estar en equilibrio termodinámico a pesar de que lo esté desde el punto de vista magnetohidrodinámico. Para que se dé el equilibrio termodinámico las partículas deben difundirse y relajar completamente los gradientes. En el equilibrio MHD las partículas permanecen confinadas durante escalas temporales ideales o resistivas, pero en escalas colisionales escapan al confinamiento y es necesario conocer los ritmos a los que esto sucede.

1.6.1. Transporte clásico y neoclásico

Históricamente, el estudio del transporte en un plasma se inició desde el punto de vista de las colisiones clásicas. En este caso, se considera que el proceso de

transporte, tanto de partículas como de energía, es difusivo y se genera debido a la existencia de gradientes de densidad y temperatura. Los flujos de partículas y calor, Γ y q , son proporcionales a los gradientes,

$$\begin{aligned}\Gamma &= -D\nabla n, \\ q &= -\kappa\nabla T,\end{aligned}\tag{1.18}$$

resultado conocido como Ley de Fick, siendo D el coeficiente de difusión y κ la conductividad térmica, relacionada con el coeficiente de difusión de calor χ mediante $\kappa = n\chi$.

Una determinación rigurosa de los coeficientes de transporte requiere un tratamiento cinético en el que se tenga en cuenta la distribución de las velocidades de las partículas, pero una estimación más simple se puede obtener suponiendo que las partículas efectúan desplazamientos de magnitud Δr en un tiempo característico Δt , al cabo del cual el movimiento queda decorrelacionado. Después de un lapso Δt vuelve a efectuar otro desplazamiento Δr (positivo o negativo con igual probabilidad) y así sucesivamente. Este proceso se denomina random walk y el coeficiente de difusión se estima mediante la expresión,

$$D \sim \frac{(\Delta r)^2}{\Delta t}.\tag{1.19}$$

En un plasma totalmente ionizado la interacción básica entre partículas es debida a colisiones coulombianas. Así, el desplazamiento promedio en cada colisión será del orden del radio de la órbita de Larmor $\Delta r \sim \rho_L$, mientras que el tiempo característico se estima mediante el inverso de la frecuencia de colisión entre partículas, $\Delta t \sim \nu^{-1}$.

Para partículas confinadas magnéticamente se puede distinguir entre la difusión paralela y la perpendicular a las líneas de campo. El interés se centra en la perpendicular puesto que es la que genera pérdidas en el confinamiento.

Si consideramos las líneas de campo magnético rectas, estamos en el caso de la difusión clásica. Si por el contrario tenemos en cuenta la geometría real de los dispositivos de fusión, en los que las trayectorias de las partículas son mucho más complicadas, la difusión colisional recibe el nombre de difusión neoclásica [15, 16]. En este caso, el desplazamiento típico en cada colisión, Δr , será la distancia media a la que están las partículas respecto de la superficie magnética, en el caso de que sean pasantes⁸, o la anchura típica de la órbita banana en el caso de partículas atrapadas. En cualquiera de estos casos, el coeficiente de difusión aumenta sustancialmente respecto al caso clásico.

⁸Debido a la inhomogeneidad del campo magnético en los dispositivos de confinamiento, determinadas partículas rebotan al ver el espejo magnético según la dirección paralela. Esas partículas se denominan atrapadas. Las que no rebotan se llaman pasantes.

1.6.2. Transporte anómalo

Los procesos por los que el equilibrio MHD se relaja hacia el equilibrio termodinámico deberían ser suficientemente lentos como para poder controlar de manera aceptable el transporte de partículas y energía. Existen muchos fenómenos por los que la energía libre de un plasma, acumulada al estar fuera del equilibrio termodinámico, puede ser liberada. Además de los procesos difusivos ya vistos en la sección anterior, el plasma tiene otras formas de relajarse. Debido a la presencia de gradientes, se pueden excitar modos de intercambio [17, 18], ondas de deriva [19], modos ballooning [20], etc. Cuando la geometría de la configuración introduce anisotropías, se genera una población de partículas atrapadas (por efecto de espejo magnético) que puede desencadenar diversas inestabilidades. La configuración magnética también puede generar diferentes inestabilidades, como *kink modes* [21, 22] o *tearing modes* [23] (en estos dos casos, la energía libre se almacena en la corriente del plasma).

El transporte observado experimentalmente en dispositivos de fusión es mucho mayor que el predicho por la teoría clásica o neoclásica [24]. Esa es la razón por la que se denomina anómalo. La difusividad de partículas y la conducción de calor, especialmente de los electrones, son mucho mayores que las predicciones neoclásicas.

Cualquier proceso de los anteriores son susceptibles de generar transporte anómalo. Dicho transporte está asociado a fluctuaciones (turbulencia) de las diferentes cantidades que caracterizan el plasma, generándose transporte radial neto.

El transporte de partículas se describe mediante una ecuación de continuidad promediada de la forma,

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \Gamma, \quad (1.20)$$

donde el promedio se realiza sobre una superficie magnética. Por otro lado, se vio que la ecuación de continuidad para una especie venía dada por,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n\mathbf{v}). \quad (1.21)$$

Promediando (1.21) sobre una superficie magnética y comparando con (1.20) se obtiene,

$$\Gamma = \langle \delta n \delta v_r \rangle, \quad (1.22)$$

siendo r la coordenada perpendicular a la superficie magnética. Así, para predecir el transporte debido a las fluctuaciones en la densidad y en la velocidad, es preciso conocer sus amplitudes y correlaciones, pero esto no es nada fácil debido a los procesos altamente no lineales que tienen lugar en el estado turbulento.

1.7. Inestabilidades en el núcleo de los dispositivos

Dentro de las ondas de deriva, los principales candidatos para explicar el transporte anómalo en la zona central de los dispositivos de fusión son la turbulencia ITG (Ion Temperature Gradient) [25, 26], ETG (Electron Temperature Gradient) [27, 28] y DTEM (Dissipative Trapped Electron Modes) [29, 30]. Las dos primeras describen un tipo de turbulencia que es generada y mantenida por los gradientes de temperatura iónica y electrónica respectivamente. Son microinestabilidades electrostáticas tipo onda de deriva. La turbulencia ITG/ETG se estudia desde un punto de vista fluido, con ecuaciones para la densidad, velocidad paralela y temperatura.

1.7.1. Inestabilidades DTEM

En la aproximación DTEM se supone que la respuesta electrónica a fluctuaciones en la densidad o el potencial electrostático no es completamente adiabática, debido a la presencia de electrones atrapados. Los iones se estudian desde un punto de vista fluido (ecuación de continuidad) y para los electrones se utiliza la relación de Boltzmann a la que se añade un término que tiene en cuenta la parte no adiabática. Por otra parte, se supone que el amortiguamiento es colisional y no tipo Landau, lo cual nos permite combinar la evolución temporal de la densidad fluctuante en una única ecuación no lineal.

Capítulo 2

Ondas de deriva. Modelo y ecuación DTEM

El presente capítulo describe, en primer lugar, el mecanismo físico de las ondas de deriva, enfocando el análisis en los procesos referentes a las derivas, tanto electrónicas como iónicas, en presencia de campos eléctricos y magnéticos. Dichas derivas debidamente combinadas generan transporte radial turbulento, determinando por tanto el tiempo de confinamiento τ , que como ya se vio en el capítulo anterior es un parámetro crítico, junto a la densidad y temperatura, a la hora de conseguir la ignición.

A fin de obtener un modelo mínimo que contenga la física básica de las ondas de deriva, desarrollaremos un modelo de fluido para los iones y supondremos que el comportamiento electrónico es cuasi-adiabático. Más adelante se verá cómo esta carencia de adiabaticidad electrónica será vital, influenciando de manera notoria la dinámica del sistema y por lo tanto el transporte asociado.

Se resaltarán las aproximaciones realizadas durante el desarrollo del modelo, así como las consecuencias que se derivan y las limitaciones de aplicabilidad que conllevan.

En la sección 2.1 se describe el proceso físico que gobierna la dinámica de las ondas de deriva particularizado a geometría cilíndrica. En la sección 2.2 se desarrolla el modelo DTEM y la ecuación que gobierna la evolución de las fluctuaciones.

2.1. Introducción a las ondas de deriva

Los trabajos de investigación en el campo del confinamiento del plasma muestran que el transporte radial de éste queda determinado en gran parte por fluctuaciones de baja frecuencia en forma de ondas de deriva. Por lo tanto, el entendimiento de la dinámica de este tipo de perturbaciones será vital para conseguir confinar eficientemente un plasma de fusión.

El transporte en plasmas está dominado por el campo eléctrico colectivo de largo alcance asociado a interacciones coulombianas entre los iones que lo componen. Para un plasma de densidad n y temperatura T el campo coulombiano asociado a cada ion decae exponencialmente más allá de la longitud de apantallamiento de Debye¹, $\lambda_D = (T/4\pi ne^2)^{1/2}$. Así, cuando las fluctuaciones del campo

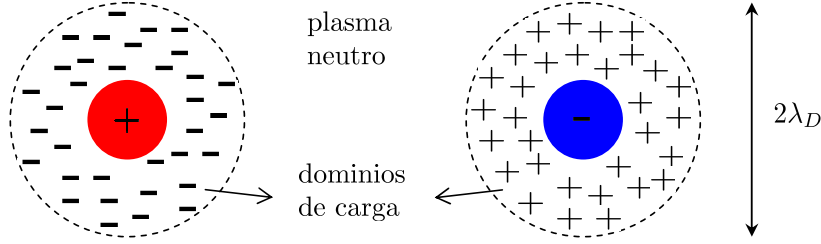


Figura 2.1: Esferas de Debye generadas por la presencia de dominios de carga. La longitud de Debye λ_D estima el rango espacial máximo en el que pueden existir tales dominios. A partir de dicha longitud el plasma puede ser considerado neutro.

eléctrico tengan escalas espaciales mucho mayores que el apantallamiento de Debye serán consideradas interacciones de campo eléctrico colectivas. Cuando las escalas asociadas a tales fluctuaciones sean del orden de la longitud de Debye serán consideradas interacciones binarias colisionales. En principio, se podría pensar que la existencia de los campos colectivos citados está en contradicción con la propia definición de longitud de Debye en la que se excluye la posibilidad de existencia de cualquier campo eléctrico a escalas mayores que dicha longitud. En realidad, en la definición de longitud de Debye se supone que los campos no son oscilantes, mientras que en nuestro caso sí lo son, por lo que pueden existir siempre y cuando sus frecuencias cumplan $\omega \gg \omega_{\text{deb}}$, siendo ω_{deb} la frecuencia de apantallamiento Debye. Para plasmas con un número suficientemente grande de partículas en la esfera de Debye $N_D = (4\pi/3) n \lambda_D^3 \gg 1$, los campos eléctricos colectivos dominan la dinámica del plasma. En el caso de plasmas magnetizados existen muchos tipos de modos colectivos, pero los que dominan el transporte son los de frecuencia más baja ($\omega \ll eB/m_i \equiv \Omega_i$). Los gradientes de densidad y temperatura en plasmas magnetizados originan corrientes diamagnéticas electrónicas e iónicas, \mathbf{J}_α , cuyos valores en el equilibrio vienen prescritos por la ecuación de balance de fuerzas de la Magnetohidrodinámica, $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$. Dichas corrientes generan derivas diamagnéticas, $V_D = (1/qnB)(\partial p / \partial r) = J/qn$, que a su vez generan oscilaciones

¹Una de las propiedades fundamentales de un plasma es su habilidad para apantallar cualquier potencial que le sea aplicado. A tal propiedad se le conoce como apantallamiento de Debye. Cualquier dominio de carga (ver Fig. 2.1) atrae iones de signo contrario de manera que casi instantáneamente una nube de partículas rodea el dominio de carga inicial. Fuera de la nube el potencial eléctrico es nulo.

colectivas llamadas ondas de deriva.

Una onda de deriva es una perturbación que se propaga en un plasma y que involucra la interacción de las derivas *perpendiculares*² ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, de polarización y diamagnética) con la dinámica *paralela*. La dinámica paralela electrónica, que se puede considerar aproximadamente adiabática, acopla fuertemente las perturbaciones en la densidad y en el potencial electrostático. Esto hace que ambas cantidades estén en fase: donde quiera que exista una perturbación de densidad, los electrones adiabáticos se encargarán de generar la correspondiente fluctuación del potencial electrostático. Las ondas de deriva son linealmente inestables para casi cualquier configuración, y por lo tanto casi siempre estarán presentes en un plasma. Surgen debido a fluctuaciones de la densidad o el potencial electrostático y toman como fuente de energía libre los gradientes en los perfiles de densidad y temperatura, constituyendo una de las fuentes de inestabilidad más activas en cualquier plasma de fusión. Allí donde existan gradientes, existirá la posibilidad de que se generen ondas de deriva. Es por ello que a este tipo de inestabilidades se les denomine *inestabilidades universales*.

Comenzaremos el estudio de las ondas de deriva dando una visión sencilla, paso a paso, introduciendo los ingredientes uno a uno para finalmente adquirir una visión general y completa de su dinámica. En primer lugar describiremos brevemente los movimientos que realizan las partículas en un plasma como elementos individuales y a partir de ahí analizaremos el mecanismo básico por el que se generan las ondas de deriva.

2.1.1. Movimientos de partículas cargadas en un plasma

El hecho de que las densidades de un plasma caigan en un rango intermedio hace difícil su análisis. A veces se comportan como fluidos y otras veces como una colección de partículas individuales. En el primero de los casos bastará la ecuación de la dinámica de fluidos para su estudio, mientras que en el segundo tendremos que utilizar la ecuación de movimiento para cada partícula individual.

Órbitas de Larmor alrededor de las líneas de campo

Cualquier partícula cargada en presencia de un campo magnético gira alrededor de las líneas de campo a la frecuencia ciclotrónica, $\omega_c \equiv |q|B/m$, describiendo órbitas cuyo radio viene dado por $r_L \equiv mV_\perp/|q|B$, siendo r_L el radio de Larmor, q y m la carga y la masa de la partícula y B y V_\perp las magnitudes del campo magnético y de la velocidad perpendicular. Si a este movimiento transversal le añadimos una componente arbitraria en la dirección paralela tenemos que globalmente las

²Los términos *perpendicular* y *paralelo* son relativos a la dirección del campo magnético confinante \mathbf{B} .

partículas describen órbitas helicoidales a lo largo de las líneas de campo, siendo éstas los centros de guía, que permanecen fijos.

Supongamos que además del campo magnético \mathbf{B} , también existe un campo eléctrico \mathbf{E} en el plasma. En este caso el movimiento global vendrá dado por la superposición de dos componentes: el giro de Larmor usual más una deriva del centro de guía. De las derivas de los centros de guía que veremos a continuación, dos de ellas se pueden deducir a partir de la ecuación de movimiento individual en presencia de campos eléctricos y magnéticos ($\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ y \mathbf{V}_p). La otra, en cambio, se obtiene a partir de la ecuación de fluido (\mathbf{V}_D).

Deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Si partimos de la ecuación de movimiento de la partícula en presencia de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} ,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

y omitimos el término $m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ que determina el ya mencionado giro de Larmor alrededor de las líneas de campo llegamos a,

$$q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.2)$$

Tomando el producto vectorial con \mathbf{B} y despejando obtenemos la velocidad de deriva del centro de guía en presencia de un campo eléctrico,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.3)$$

Es importante resaltar que dicha deriva es independiente de la carga, masa y velocidad perpendicular de la partícula alrededor del centro de guía.

Deriva de polarización

Si el campo eléctrico es variable en el tiempo, aparece una nueva deriva,

$$\mathbf{V}_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad (2.4)$$

donde el signo positivo corresponde a la deriva iónica y el negativo a la electrónica. Como es inversamente proporcional a la frecuencia ciclotrónica, sólo será importante para los iones ya que $\omega_{ci} \ll \omega_{ce}$. Además, su magnitud está relacionada con la de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, $|\mathbf{V}_p| = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{E}{B} = \frac{\omega}{\omega_c} |\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}|$, siendo ω la frecuencia de la onda. Así, cuando los campos oscilantes sean de baja frecuencia (como es el caso de las ondas de deriva) su magnitud será mucho más pequeña que la de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Dado que \mathbf{V}_p tiene signo opuesto para ambas especies, se generará una corriente de polarización dada por,

$$\mathbf{J}_p = ne (V_{pi} - V_{pe}) = \frac{\rho}{B^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad (2.5)$$

siendo ρ la densidad de masa.

Deriva diamagnética

Considerando el plasma como un fluido, es de esperar que éste presente derivas perpendiculares al campo \mathbf{B} ya que los centros de guía de las partículas que lo componen sufrían tales derivas en sus movimientos individuales. Sin embargo, en la ecuación de fluido aparece un término, ∇p , que no existe en las ecuaciones de partícula individual. Así, los elementos de fluido sufren una nueva deriva que para las partículas, consideradas de forma individual, no existe. Se trata de la deriva diamagnética y tiene la siguiente expresión,

$$\mathbf{V}_D = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2}, \quad (2.6)$$

donde al igual que para la deriva de polarización, también se genera una corriente, en este caso diamagnética, asociada la deriva,

$$\mathbf{J}_D = ne (V_{Di} - V_{De}) = (KT_i + KT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2}. \quad (2.7)$$

Dinámica electrónica en dirección paralela a \mathbf{B}

Las partículas que componen el plasma fluyen según la dirección del campo magnético regidos por el balance entre las fuerzas electrostáticas y los gradientes de presión de acuerdo a la expresión,

$$mn \left[\frac{\partial V_{\parallel}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) V_{\parallel} \right] = qnE_{\parallel} - \nabla_{\parallel} p. \quad (2.8)$$

Suponiendo que $(\mathbf{v} \cdot \nabla) V_{\parallel} \ll \partial V_{\parallel} / \partial t$, que la presión se puede escribir como $p = nT$ y que la conductividad paralela es infinita llegamos a,

$$\frac{\partial V_{\parallel}}{\partial t} = \frac{q}{m} E_{\parallel} - \frac{T}{mn} \nabla_{\parallel} n. \quad (2.9)$$

Aplicando la ecuación anterior a los electrones, suponiendo $m \rightarrow 0$ y especificando $q = -e$ y $\mathbf{E} = -\nabla \phi$,

$$qE_{\parallel} = e \nabla_{\parallel} \phi = \frac{T_e}{n} \nabla_{\parallel} n. \quad (2.10)$$

Finalmente integrando,

$$e\phi = T_e \ln n + C, \quad (2.11)$$

o

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right), \quad (2.12)$$

que es la relación de Boltzmann para los electrones.

Debido a su ligereza, los electrones tienen una movilidad extremadamente alta y fácilmente pueden ser acelerados, alcanzando grandes energías si sobre ellos actúa alguna fuerza. Sin embargo, en un plasma los electrones no son libres de moverse colectivamente de un lugar hacia otro puesto que ello originaría un aumento brusco del potencial debido a los iones que quedan. La Ec. (2.12) refleja el estrecho equilibrio que ha de existir entre las fuerzas termodinámicas y electrostáticas para preservar la cuasineutralidad del plasma suponiendo a los electrones infinitamente móviles.

2.1.2. Geometría

Supondremos que nuestro plasma está contenido en un cilindro tal y como se muestra en la Fig. 2.2(a). La analogía con un toroide [Fig. 2.2(b)] es clara. Las diferencias estriban en los efectos de curvatura, que no entran en juego en geometría cilíndrica y también en el hecho de que en un toroide cualquier magnitud tiene que ser periódica bajo giros completos según la dirección toroidal. Esto último se resuelve imponiendo que las magnitudes tratadas sean periódicas en las tapas del cilindro. Dicho cilindro tiene un radio a y una longitud L . El radio del cilindro se identifica con el radio menor del toro. La relación entre la longitud del cilindro y el radio mayor del toro, R_0 , será $R_0 = L/2\pi$. Dentro del cilindro la posición se define relativa a tres vectores unitarios, $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$, siendo r la coordenada radial; $r \in [0, a]$, θ la coordenada angular o poloidal; $\theta \in [0, 2\pi]$ y z la coordenada asociada a ζ , la coordenada toroidal; $z \in [0, L]$, o lo que es lo mismo $\zeta \in [0, 2\pi]$ ($\zeta = 2\pi z/L$).

2.1.3. Mecanismo de las Ondas de Deriva

En la Fig. 2.3(a) se muestra el aspecto de una onda de deriva en geometría cilíndrica. Si se aumenta el tamaño de la sección encerrada por el rectángulo y se endereza para adaptarla a la geometría cartesiana el aspecto sería el de la Fig. 2.3(b). La fuente de energía libre es, como se dijo anteriormente, cualquier gradiente en la densidad o en la temperatura. Las coordenadas cartesianas x , y y z son las asociadas a las componentes r , θ y z de un cilindro. La componente z es la dirección del campo magnético confinante B_0 . El gradiente de densidad tiene dirección $-x$. Las superficies de densidad constante están según la dirección y que es perpendicular a la de ∇n .

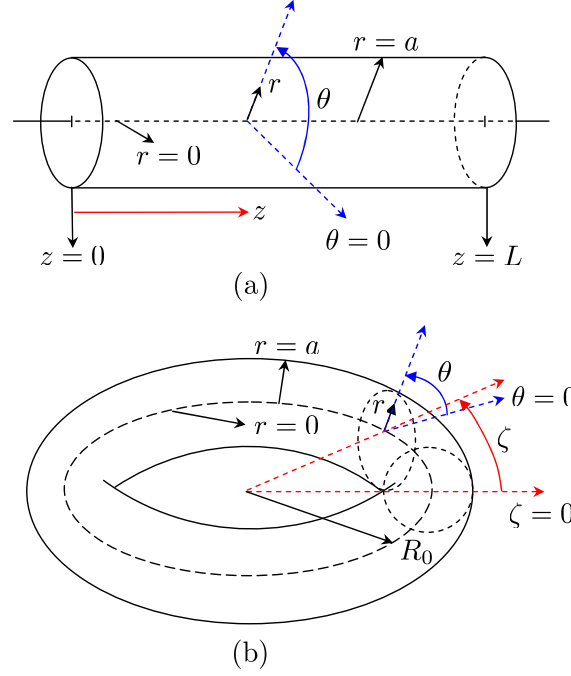


Figura 2.2: Analogía entre las geometrías cilíndrica (a) y toroidal (b).

Dinámica paralela a \mathbf{B}

Por simplicidad haremos el estudio de la dinámica de las ondas de deriva atendiendo a las direcciones paralela y perpendicular al campo magnético, de las diferentes magnitudes involucradas.

Comencemos con un plasma en reposo, homogéneo y magnetizado. Supongamos que se forma un cúmulo de partículas extra en un lugar determinado, tal y como se muestra en la Fig. 2.4. Inicialmente el sistema es exactamente neutro: $\tilde{\phi} = 0$. En el momento en que los electrones vean una zona en la que existe un gradiente de presión tenderán a escapar en la dirección paralela a \mathbf{B} , dejando la zona instantáneamente con exceso de iones ya que la movilidad de los electrones es un factor $(m_i/m_e)^{1/2}$ mayor. Considerando únicamente la dinámica paralela, el potencial electrostático aumentaría hasta llegar al punto en el que la componente paralela de la fuerza sobre los electrones es cancelada por la propia fluctuación en el potencial, de manera que los electrones volverían a su situación inicial y el sistema evolucionaría a la frecuencia del plasma electrónica. Los electrones estarían oscilando en torno a la perturbación inicial, amortiguados por colisiones con los iones, y los iones fluirían a la velocidad sónica iónica, arrastrados por los electrones.

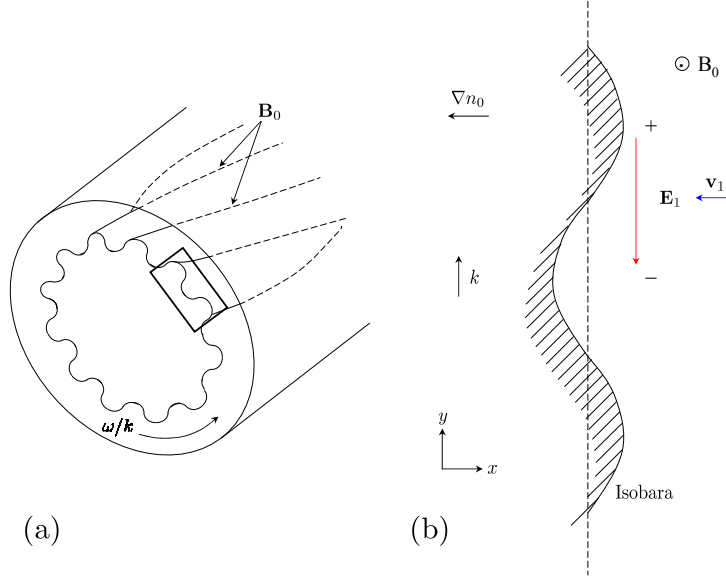


Figura 2.3: (a) Esquema de una onda de deriva en un cilindro. Se trata de una perturbación de densidad (línea ondulada según la dirección poloidal y líneas discontinuas según la dirección toroidal). El rectángulo está ampliado en (b), donde se muestra el mecanismo físico de una onda de deriva. Figura tomada de [31].

Efecto de la deriva de polarización

Como ya se vio en la sección 2.1.1, la deriva de polarización surge como consecuencia de la variación temporal del potencial electrostático, que en este caso se debe a los diferentes ritmos a los que iones y electrones abandonan la fluctuación inicial de la densidad, excitándose por consiguiente una fluctuación en el potencial electrostático variable en el tiempo. Esta variación del potencial electrostático se produce en escalas temporales mucho más lentas que la escala temporal asociada a la frecuencia ciclotrónica iónica, $\omega \ll \omega_{ci}$.

A medida que el potencial aumenta en la zona en que los electrones parten en dirección paralela, los iones sufren la deriva de polarización, que trata de mantener el plasma neutro. Si la colisionalidad entre iones y electrones es pequeña en la dirección paralela, algunos de los electrones que inicialmente escapan llegarán a otras zonas según la dirección de \mathbf{B} generando nuevas fluctuaciones en el potencial (en este caso negativas), hacia donde acudirán los iones de zonas adyacentes debido a la correspondiente deriva de polarización, para nuevamente preservar la cuasineutralidad del plasma.

Si la dinámica paralela electrónica es colisional, las fluctuaciones en la densidad y el potencial se relajarán mutuamente y el proceso termina disipándose. Si no, se tiene una onda iónica acústica en dirección paralela a \mathbf{B} .

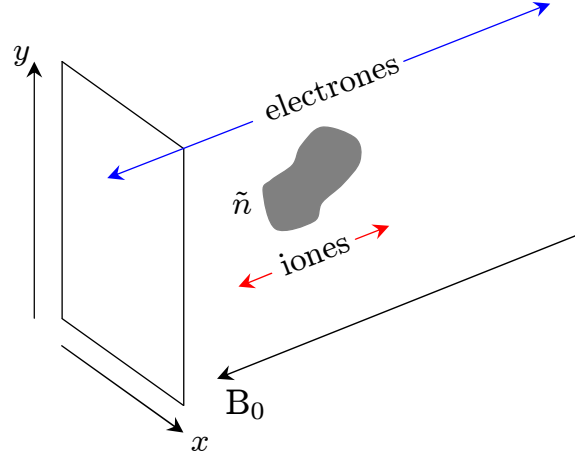
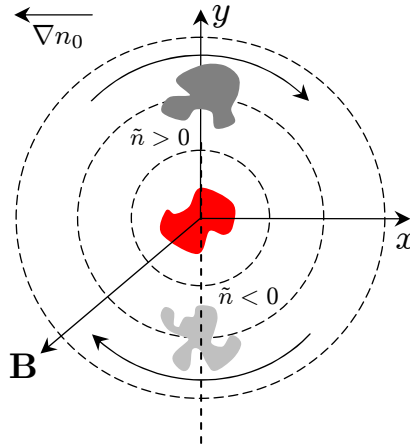


Figura 2.4: Respuesta inicial en dirección paralela.

Efecto de un gradiente de densidad radial

El efecto de añadir un gradiente en la densidad de equilibrio es lo que le da al fenómeno anterior el carácter propagante, convirtiéndose así en una onda de deriva. En la Fig. 2.5 se muestra el proceso por el cual aparecen nuevas fluctuaciones en la densidad debido a la combinación de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ generada por el campo electrostático fluctuante (en rojo) con el gradiente en la densidad, ∇n en la dirección $-x$.

Figura 2.5: Efecto de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ en una zona con gradiente de densidad.

La deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ mueve las partículas en dirección horaria en torno a la fluctuación inicial en el potencial (máximo). Debido a que la parte de fluido que viaja hacia la derecha lo hace “a favor del gradiente”, en contraposición a la parte de fluido que lo hace hacia la izquierda “en contra del gradiente”, se genera una nueva

fluctuación en la densidad que está adelantada según la dirección y respecto a la fluctuación del potencial.

Analicemos qué sucede en la zona superior de la fluctuación en el potencial según la Fig. 2.5 (dirección y). La combinación de las acciones ejercidas por la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ y el gradiente en la densidad de equilibrio generan una fluctuación en la densidad adelantada a la del potencial. De esta nueva perturbación en la densidad salen electrones en dirección paralela a \mathbf{B} debido a las correspondientes fuerzas termodinámicas. Debido a esto, se genera una nueva fluctuación en el potencial, que es variable en el tiempo. A medida que el potencial aumenta los iones sufren la correspondiente deriva de polarización (en dirección perpendicular hacia fuera) para preservar la cuasineutralidad.

Por otra parte, en la zona inferior de la fluctuación inicial en el potencial se genera una nueva fluctuación en la densidad, pero en este caso negativa. Debido a esto hacia esa zona acudirán electrones en dirección paralela que generarán una nueva fluctuación en el potencial de signo negativo y variable en el tiempo, que hará que los iones de zonas adyacentes sientan la correspondiente deriva de polarización y acudan hacia allí para nuevamente preservar la cuasineutralidad.

Lo que ha sucedido globalmente es un leve desplazamiento del sistema en la dirección y . Este proceso se repite de forma que el efecto neto es una propagación de la estructura en dicha dirección.

Efecto de un campo magnético inhomogéneo

Hasta aquí implícitamente se ha supuesto que el campo magnético es homogéneo, pero en realidad esto no es así. En un dispositivo como un tokamak las superficies magnéticas están dispuestas en forma de toroides anidados y es imposible tal configuración con un campo sin gradientes. El campo ha de tener gradientes en la dirección radial para que se satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

Consideremos ahora la deriva diamagnética. En los apartados anteriores no se tuvo en cuenta porque en campos homogéneos la contribución de cada especie a la corriente diamagnética no depende de la posición alrededor de la fluctuación y por lo tanto no se generan dominios de carga al ser siempre la divergencia de la corriente nula. En la Fig. 2.6 se muestra un esquema del proceso. Debido a los gradientes de presión asociados a la fluctuación inicial en la densidad, las partículas del plasma sufren la correspondiente deriva diamagnética, $\mathbf{V}_D = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2}$. Las flechas indican la dirección y sentido de esta deriva para electrones e iones. Es perpendicular a \mathbf{B} y a la fuerza que la provoca, en este caso el gradiente en la presión fluctuante y varía en magnitud inversamente proporcional al campo magnético. Tiene dirección opuesta para iones y para electrones. Debido al gradiente de \mathbf{B} según la coordenada x , las corrientes diamagnéticas tendrán mayor intensidad en las zonas de campo débil, es decir, en la zona derecha de 2.6(a) y en la zona izquierda de 2.6(b). Esto hace que se formen nuevas fluctuaciones de potencial de

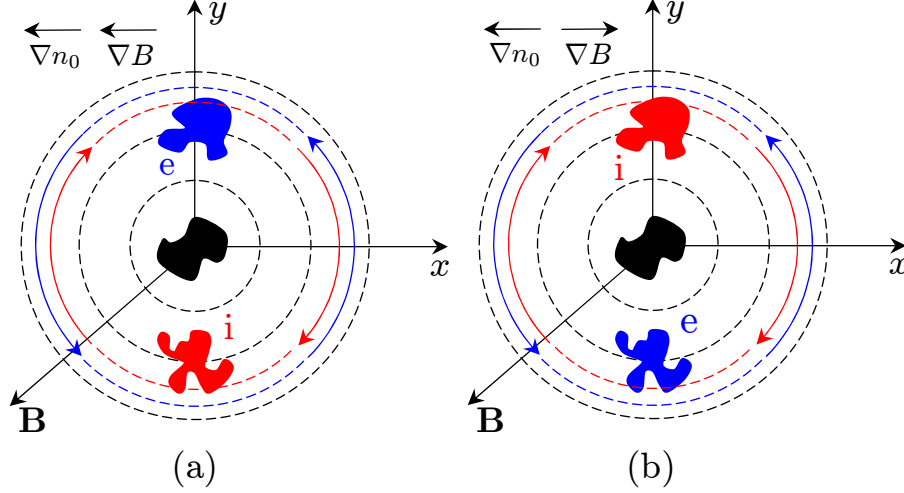


Figura 2.6: Efecto de la deriva diamagnética en zonas con gradiente de campo magnético paralelo (a) y antiparalelo (b) al gradiente del perfil de densidad.

manera que en 2.6(a) la nueva fluctuación está retrasada 90° respecto a la fluctuación en la densidad, mientras que en 2.6(b) está adelantada 90° . En el primer caso el efecto global es una transferencia de densidad del gradiente a la fluctuación, o lo que es lo mismo, la fluctuación está siendo alimentada por el perfil de densidad. En el segundo caso sucede lo contrario, la fluctuación cede densidad al perfil y por lo tanto se está amortiguando. En dispositivos de confinamiento toroidal, ∇B y ∇n son paralelos en la zona exterior y son antiparalelos en la zona interior, por lo que fluctuaciones tipo onda de deriva serán importantes en la zona exterior y serán amortiguadas en la zona interior. Un efecto parecido a la deriva diamagnética tienen las derivas de curvatura y de campo magnético inhomogéneo, ya que tienen a desestabilizar más en la zona externa de los dispositivos (zona de curvatura desfavorable) que en la zona interna (zona de curvatura favorable).

Escalas temporales

Para entender la dinámica de las ondas de deriva se establece el siguiente “ordering” en las escalas temporales asociadas a los diferentes sucesos:

$$\tau_{\parallel e^-} \ll \tau_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \simeq \tau_{\text{propagación}} \ll \tau_{\text{onda sónica iónica}}. \quad (2.13)$$

La escala temporal asociada a la onda sónica iónica ha de ser muy lenta en comparación a la escala temporal de la propagación de la onda de deriva o de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Esto asegura la existencia de gradientes paralelos y por lo tanto garantiza el acoplo entre densidad y potencial fluctuantes. A su vez, la propagación tiene que ser lenta respecto a la dinámica paralela electrónica. Los electrones son adiabáticos y su dinámica mucha más rápida que la de la propagación o la de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Electrones no adiabáticos

Hasta ahora se ha descrito el mecanismo de generación y propagación de las ondas de deriva considerando a los electrones adiabáticos, de manera que las fluctuaciones en la densidad y el potencial están fuertemente acopladas y no existe desfase. ¿Qué sucede cuando esto no es así? Supongamos que ahora tenemos una serie de electrones atrapados y que por lo tanto fluctuaciones en densidad y potencial están ligeramente desfasadas, como se muestra en la Fig. 2.7. Este pequeño desfase

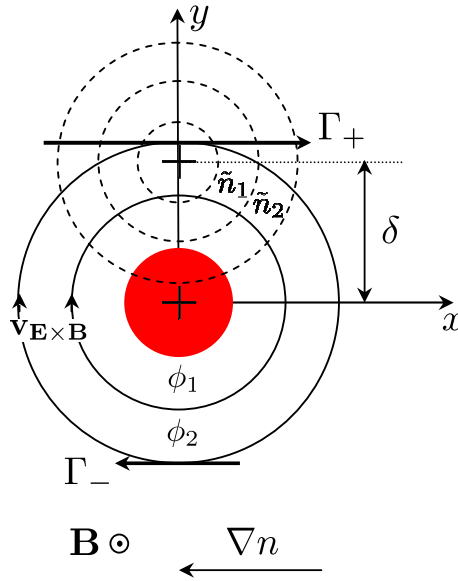


Figura 2.7: Esquema de una onda de deriva. Los contornos de $\phi = \text{const}$ en el plano perpendicular a \mathbf{B} son las líneas de flujo de la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ alrededor del máximo de potencial. El pequeño desfase δ entre la fluctuación de densidad y la correspondiente al potencial hace que la primera adelante a la segunda según la dirección de propagación (y).

genera transporte neto, $\Gamma_+ - \Gamma_- > 0$, ya que el flujo $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ mueve más partículas de la zona superior hacia la derecha que de la zona inferior a la izquierda. Si los electrones fuesen completamente adiabáticos los máximos y mínimos de las fluctuaciones de densidad y potencial serían coincidentes y tendríamos $\Gamma_+ = \Gamma_-$.

2.2. Modelo DTEM

En esta sección se desarrolla el modelo que usaremos para estudiar el transporte asociado a un tipo particular de ondas de deriva: el modelo de turbulencia DTEM.

La estructura lineal queda determinada por la deriva de polarización iónica, que aporta la inestabilidad lineal o *drive* y por el amortiguamiento acústico, que

para este modelo es colisional. El mecanismo de interacción no lineal se basa en la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

2.2.1. Suposiciones y aproximaciones

La ecuación resultante para el modelo se obtiene bajo tres suposiciones fundamentales:

1. La fuente de inestabilidad va a ser la colonia de electrones atrapados en el espejo magnético conformado por el gradiente de campo en la dirección del radio mayor del toro. Estos electrones generan un desfase adicional entre el potencial y la densidad fluctuantes que será el responsable del transporte asociado a este tipo de turbulencia. Este desfase se estima mediante hipótesis cinéticas y se introduce en la ecuación para la densidad fluctuante como un término del tipo *id* [32] que representa el mecanismo desencadenante³ de la inestabilidad.
2. El término de amortiguamiento paralelo se supondrá colisional y no de tipo Landau. Esto permite combinar la evolución global para la densidad fluctuante en una única ecuación no lineal. El amortiguamiento de Landau es un mecanismo de interacción onda-partícula mediante el cual las ondas cogen o ceden energía a las partículas con velocidades similares a la velocidad de fase v_f (partículas en resonancia con la onda). Dado que hay más partículas con velocidad $v \lesssim v_f$ (partículas que cogen energía de la onda) que con velocidad $v \gtrsim v_f$ (partículas que ceden energía a la onda), la onda se amortigua [33].
3. Se considerarán modos de longitud de onda larga, $k_\perp \rho_s \ll 1$. En este límite sólo retendremos el término no lineal $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, mucho mayor que el término no lineal que surge de la deriva de polarización.

De esta manera se obtiene una única ecuación que gobierna la dinámica de ondas de deriva en el dominio de modos de longitud de onda larga. En contraposición, el modelo de Hasegawa-Mima [34] da cuenta de la dinámica de las fluctuaciones en el extremo espectral opuesto ($k_\perp \rho_s \gg 1$).

Durante el desarrollo de la ecuación DTEM se harán una serie de aproximaciones:

1. Dado que el modelo sólo resuelve un campo (densidad), se considera únicamente la evolución del perfil de densidad y se mantiene congelado el perfil de temperatura. Por lo tanto, a pesar de que el drive para las fluctuaciones depende del perfil de temperatura, sólo podrá ser alterado por modificaciones en el perfil de densidad, ya que el primero de ellos permanece constante.

³En lo sucesivo, al mecanismo desencadenante o desestabilizante lo denominaremos con el término inglés *drive*.

2. La geometría es cilíndrico-toroidal. El campo magnético de equilibrio es básicamente axial (toroidal) con una pequeña componente poloidal necesaria para poder generar las superficies de flujo, que se distribuyen radialmente conformando una serie de toroides anidados.
3. Las magnitudes de equilibrio presentan gradientes según la dirección radial y se considerarán constantes según las direcciones toroidal y poloidal.
4. Como el factor beta⁴ tiene un valor muy bajo, $\beta \ll 1$, las perturbaciones que sobre el campo magnético de equilibrio puedan ejercer densidad y potencial fluctuantes se considerarán despreciables. Así, $\partial B / \partial t = 0$ y la ley de Faraday se puede escribir como $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Es lo que se denomina aproximación electrostática, siendo ϕ el potencial electrostático.
5. La condición de cuasineutralidad impuesta en la deducción de la ecuación para las fluctuaciones es válida bajo la aproximación $k \ll \lambda_D^{-1}$, siendo λ_D la longitud de Debye. Un plasma se puede considerar cuasineutro para distancias mayores que la longitud de Debye.
6. La densidad de partículas se escribe como la suma de dos cantidades que se corresponden con el equilibrio y la perturbación al equilibrio, $n_e = n_i = n_0 + \tilde{n}$.
7. El ordering básico para la escala temporal será $\omega \ll \Omega_i$. Las escalas temporales asociadas a cualquier mecanismo físico son mucho mayores que la escala temporal asociada al movimiento de giro de los iones alrededor de las líneas de campo magnético.
8. De la suposición anterior se desprende que la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ es dominante sobre la de polarización $\mathbf{V}_{pol} = \frac{1}{\Omega_i} \frac{\mathbf{B}}{B} \times \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_{E \times B})$.
9. El ordering básico para la escala espacial será $\rho_s \ll L_n$, siendo ρ_s la escala típica de las perturbaciones y L_n la escala típica del equilibrio.
10. Las inestabilidades tipo onda de deriva varían principalmente en el plano toroidal, $k_z = n/R_0 \ll k_y = m/a \sim k_x$.

2.2.2. Campo magnético

El campo magnético externo necesario para confinar el plasma tiene componentes según las direcciones z y θ , $\mathbf{B} = B_0 \hat{z} + B_\theta(r) \hat{\theta}$, con B_0 constante y $B_\theta(r) = B_\theta(r_0) + B_0 \frac{r-r_0}{L_s}$.

⁴Este parámetro es la razón entre la presión termodinámica y la presión magnética del plasma, $\beta \equiv \frac{n_e T_e}{B^2 / 2\mu_0}$.

La dependencia en r de la componente poloidal del campo hace que el enrollado de las líneas magnéticas varíe en función de la posición radial. Esto es lo que se llama *shear*⁵ magnético. Una cantidad que relaciona las componentes toroidal y poloidal del campo magnético es el *factor de seguridad*, $q(r) = \varepsilon(r)B_z(r)/B_\theta(r) = [r/R_0][B_z(r)/B_\theta(r)]$, utilizado para definir la longitud característica del shear, $L_s = \frac{q^2}{\varepsilon}(dq/dr)^{-1}$, siendo ε la inversa de la razón de aspecto que relaciona las dimensiones de los radios menor y mayor respectivamente. El factor de seguridad nos dice el número de ciclos según la dirección toroidal que se completan en un ciclo poloidal de una línea de campo, por lo que su relación con la transformada rotacional, ι , ya mencionada en el capítulo anterior es, $q = 2\pi/\iota$. Cuando esta cantidad se pueda escribir como el cociente de dos números enteros [$q(r) = m/n$], tendremos que la línea de campo se cierra sobre sí misma tras haber ejecutado m giros poloidales y n giros toroidales, constituyendo así una *superficie racional*. Valores típicos de esta cantidad son del orden de la unidad, ya que para la mayoría de los tokamaks se cumple que $\varepsilon(r) = r/R_0 \approx B_\theta(r)/B_z(r) \ll 1$.

2.2.3. Equilibrio

Las cantidades que describen el equilibrio junto al campo magnético confinante son los perfiles de densidad y temperatura, caracterizados por sus respectivas longitudes características $L_n = n_0 |dn_0/dr|^{-1}$ y $L_T = T_0 |dT_0/dr|^{-1}$ respectivamente. También puede existir un campo eléctrico radial de equilibrio E_{0r} , que induzca un flujo poloidal de equilibrio $V_{0\theta}(r) \sim E_{0r}(r)/B_0$. Cuando dicho flujo poloidal no es uniforme se dice que existe un *shear flow*⁶. De aquí en adelante las magnitudes de equilibrio llevarán subíndice 0 mientras que las perturbaciones se identificarán con una tilde o con un gorro si están normalizadas al equilibrio.

2.2.4. Término “ $i\delta$ ”

Para desarrollar el modelo enfocaremos el análisis en el régimen gobernado por modos DTEM [35]. En este régimen la respuesta electrónica a las fluctuaciones en la densidad o en el potencial electrostático no es completamente adiabática, de forma que existe un ligero desfase entre ambas. Dicho desfase se puede derivar mediante hipótesis cinéticas [36]. Hay que recordar que es imprescindible que exista desfase entre ambas cantidades fluctuantes puesto que de lo contrario sólo tendríamos una onda propagándose en la dirección de deriva diamagnética (dirección poloidal) y no se generaría transporte.

Supondremos que la función de distribución electrónica puede escribirse como suma de una Maxwelliana más una perturbación, $f = f_0 + \tilde{f}$. Llamaremos \tilde{g} a la

⁵Usaremos el término inglés *shear* para designar la cizalla.

⁶En analogía con el shear magnético, el shear flow representa un flujo poloidal variable en magnitud según la posición radial.

parte no adiabática de \tilde{f} . Sustituyendo en la ecuación de Vlasov y promediando sobre la girofase, se llega a la ecuación girocinética que rige la dinámica electrónica [37, 38],

$$\begin{aligned} & -i(\omega - \omega_E - \omega_{De} + i\nu_{\text{eff}})\tilde{g}_{\mathbf{k}} \\ & = i\frac{|e|}{T_0}\sqrt{\varepsilon}f_0\{\omega - \omega_E - \omega_{*e}[1 + \eta_e(E - 1/2)]\}\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

siendo ω la frecuencia de la onda, $\omega_E \equiv k_\theta V_0(r)$ la frecuencia debida al desplazamiento Doppler en caso de que exista velocidad poloidal de equilibrio, ω_{De} la frecuencia de deriva de curvatura electrónica, ν_{eff} la frecuencia de colisión efectiva para los electrones atrapados ($\nu_{\text{eff}} = \nu_e/\varepsilon$), $\tilde{g}_{\mathbf{k}}$ la componente no-adiabática de la función de distribución perturbada con número de onda \mathbf{k} , $\sqrt{\varepsilon}$ la fracción de electrones atrapados, f_0 la función de distribución de equilibrio, $\omega_{*e} = k_\theta V_{*n}$ la frecuencia de deriva diamagnética, con $V_{*n} = c_s \rho_s / L_n$ la velocidad de deriva diamagnética, $c_s = (T_0/m_i)^{1/2}$ la velocidad sónica iónica, $\rho_s = c_s / \Omega_i$ el radio de giro iónico, E la energía electrónica y $\eta_e = L_n / L_T$ la relación entre las longitudes características de los perfiles de densidad y temperatura de equilibrio respectivamente. Bajo la aproximación $\nu_{\text{eff}} \gg \omega - \omega_E$ y $\nu_{\text{eff}} \gg \omega_{De}$ (electrones atrapados altamente colisionales o modos fuertemente DTEM), e integrando la Ec. (2.14) en el espacio de velocidades, obtenemos la respuesta no-adiabática para la densidad fluctuante,

$$\delta n_{\mathbf{k}}^{\text{NA}} = i\frac{|e|}{T_0}\sqrt{\varepsilon}\frac{[\omega - \omega_E - \omega_{*e}(1 + \alpha\eta_e)]}{\nu_{\text{eff}}}\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}, \quad (2.15)$$

donde $\alpha = 3/2$. La frecuencia asociada al modo \mathbf{k} , $\omega_{\mathbf{k}}$, se relaciona con la frecuencia de desplazamiento Doppler en la superficie racional del modo \mathbf{k} , $\omega_{E\mathbf{k}}$, $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_{E\mathbf{k}} + \omega_{*e}/(1 + k_\theta^2 \rho_s^2)$, por lo que la Ec. (2.15) se convierte en,

$$\delta n_{\mathbf{k}}^{\text{NA}} = i\frac{|e|}{T_0}\sqrt{\varepsilon}\frac{[-k_\theta^2 \rho_s^2 \omega_{*e}/(1 + k_\theta^2 \rho_s^2) - \omega_{*e} \alpha \eta_e]}{\nu_{\text{eff}}}\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}. \quad (2.16)$$

Suponiendo que $\eta_e \geq 1$ (longitud típica del perfil de densidad mayor que la del perfil de temperatura) y que $k_\theta \rho_s < 1$ (modos de longitud de onda poloidal mayor que el radio de giro iónico), el primer término en el numerador de (2.16) es pequeño comparado con el segundo por lo que la respuesta no-adiabática electrónica será,

$$\delta n^{\text{NA}} = -\alpha\sqrt{\varepsilon}\frac{V_{*T}}{\nu_{\text{eff}}}k_\theta\left(\frac{|e|\tilde{\phi}}{T_0}\right), \quad (2.17)$$

donde $V_{*T} = c_s \rho_s / L_T$ es la velocidad de deriva térmica electrónica.

La Ec. (2.17) da cuenta del desfase adicional entre las fluctuaciones en la densidad y el potencial. No todos los electrones serán completamente adiabáticos

ya que la presencia de los electrones atrapados lo impide. Este hecho se manifiesta en la relación de Boltzmann con la inclusión de un término perturbativo $\tilde{n}_e/n_0 = (e\tilde{\phi}/T_0)(1 + i\delta)$, quedando la ecuación de Boltzmann modificada,

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} \approx \frac{\tilde{n}_i}{n_0} = \frac{e\tilde{\phi}}{T_0}(1 + i\delta) = \frac{e\tilde{\phi}}{T_0} \left(1 - i\alpha\sqrt{\varepsilon}\frac{V_{*T}}{\nu_{\text{eff}}}k_\theta \right), \quad (2.18)$$

donde se ha impuesto la condición de cuasineutralidad.

Finalmente, podemos escribir el potencial electrostático perturbado en función de la densidad iónica fluctuante, tratando perturbativamente la contribución de los electrones no-adiabáticos e invirtiendo (2.18),

$$\begin{aligned} \frac{e\tilde{\phi}}{T_0} &= \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \left(1 + \alpha\sqrt{\varepsilon}\frac{V_{*T}}{\nu_{\text{eff}}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \right) = \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \left(1 + i\alpha\sqrt{\varepsilon}\frac{V_{*T}}{\nu_{\text{eff}}}k_\theta \right) \\ &= \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \left(1 + i\frac{k_\theta D_\theta}{V_{*n}} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

con $D_\theta = (\sqrt{\varepsilon}(\rho_s c_s)^2 \alpha) / (L_T L_n \nu_{\text{eff}})$.

2.2.5. Inversión explícita de la ecuación de Boltzmann modificada

La inversión realizada en el paso de (2.18) a (2.19) es aproximada y podrá considerarse aceptable cuando se verifique $k_\theta D_\theta / V_{*n} \ll 1$. Esta condición se cumple cuando los modos tienen números de onda bajo ($k_\theta < k_\theta^{\text{crit}}$). Dado que se necesita un espectro de modos lo suficientemente amplio como para incluir aquellos que sean estables y actúen de sumidero de energía, $k_\theta > k_\theta^{\text{crit}}$, la inversión aproximada no es válida y se precisa de una inversión explícita que sea válida para cualquier número de onda. Tal inversión genera una ecuación equivalente a (2.19), cambiando el coeficiente para el drive, D_θ , por otro efectivo, D_{eff} , que ahora depende de k_θ ,

$$D_{\text{eff}} = \frac{D_\theta}{1 + \left(\frac{k_\theta D_\theta}{V_{*n}} \right)^2}. \quad (2.20)$$

El término extra en el denominador de la expresión (2.20) hace que el drive sea pequeño para modos con número de onda poloidal grande y permitirá tener un número finito de modos inestables verificando $k_\theta \rho_s < 1$.

2.2.6. Ecuación de continuidad iónica y ecuación DTEM

Los iones se tratarán como un fluido, por lo que la dinámica de la densidad iónica fluctuante quedará gobernada por la ecuación de continuidad $\partial n_i / \partial t + \nabla \cdot (n_i \mathbf{V}) = 0$.

Tanto densidad como velocidad de fluido iónicas pueden expresarse como suma de un término de equilibrio más uno fluctuante, $n_i = n_0 + \tilde{n}_i$ y $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}$ respectivamente. La velocidad fluctuante a su vez consta de dos contribuciones: la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ y la deriva de polarización, $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{V}}_{pol}$. Surgen de la ecuación de balance de momento iónico tomando órdenes 0 y 1 en ω/Ω_i respectivamente. Las expresiones para ambas, en función del potencial electrostático perturbado y de la densidad iónica perturbada son,

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = -\frac{1}{B} \nabla_{\perp} \tilde{\phi} \times \hat{z} = -\frac{c_s \rho_s}{n_0} \left[\nabla_{\perp} \tilde{n}_i + \frac{D_{eff}}{V_{*n}} \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \theta} \right) \right] \times \hat{z} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{pol} = -\frac{1}{\Omega_i B} \frac{d}{dt} \nabla_{\perp} \tilde{\phi} = -\frac{\rho_s^2}{n_0} \frac{d}{dt} \left[\nabla_{\perp} \tilde{n}_i + \frac{D_{eff}}{V_{*n}} \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (2.22)$$

Escribiendo la densidad iónica y la velocidad como suma de cantidades de equilibrio más perturbaciones, la ecuación de continuidad para la densidad fluctuante queda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla n_0 + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \tilde{n}_i + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla n_0 + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{n}_i \\ + n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_0 + \tilde{n}_i \nabla \cdot \mathbf{V}_0 + n_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{n}_i \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Los términos primero, tercero y séptimo son de orden cero en las fluctuaciones y constituyen la ecuación de continuidad para la densidad de equilibrio. Los términos segundo y cuarto constituyen la derivada convectiva para las fluctuaciones, $d\tilde{n}_i/dt \equiv \partial \tilde{n}_i / \partial t + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \tilde{n}_i$. El décimo término es despreciable frente al noveno y el octavo término es nulo debido a que el flujo poloidal de equilibrio tiene divergencia nula. Así, la ecuación de continuidad para las fluctuaciones queda,

$$\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \tilde{n}_i + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla n_0 + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{n}_i + n_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} = 0. \quad (2.24)$$

Supondremos que el balance del momento iónico en dirección paralela está dominado por colisiones, es decir, será tratado como un proceso difusivo cuyo flujo de partículas según la dirección de \mathbf{B} será,

$$\Gamma = n_0 \tilde{\mathbf{V}}_{\parallel} = -D_{\parallel} \nabla \tilde{n}_i = -\frac{c_s^2}{\nu_i} \nabla \tilde{n}_i. \quad (2.25)$$

La Ec. (2.24) queda en forma desarrollada,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{n}}{dt} - \rho_s^2 \frac{d\nabla_{\perp}^2 \hat{n}}{dt} + V_{*n} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} + D_{eff} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial \theta^2} - \frac{c_s^2}{\nu_i} \nabla_{\parallel}^2 \hat{n} \\ - L_n D_{eff} \left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \hat{n} \\ + c_s \rho_s [\nabla_{\perp} \hat{n} \times \hat{z}] \cdot \nabla_{\perp} (\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \hat{n}) = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde la densidad iónica fluctuante se ha normalizado a su valor de equilibrio, $\hat{n} = \tilde{n}_i/n_0$. Los gradientes paralelos (∇_{\parallel}) son relativos al campo magnético \mathbf{B} y los gradientes perpendiculares (∇_{\perp}) al eje \hat{z} . Las escalas básicas para los tiempos y las longitudes son la frecuencia ciclotrónica iónica $\Omega_i = |e|B_0/m_i$ y el radio menor a respectivamente. Una vez que tiempos y longitudes se normalizan a estas escalas el resto del problema se determina especificando unos pocos parámetros adimensionales.

Se puede identificar el papel de cada término en (2.26). La derivada convectiva de los dos primeros términos representa la evolución temporal de las fluctuaciones. El segundo de ellos procede de $n_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{pol}$ de la Ec. (2.24), por lo tanto proviene de la deriva de polarización iónica. El tercer término, la deriva diamagnética, procede de $\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla n_0$, siendo V_{*n} la velocidad de deriva diamagnética, como ya se dijo antes. El siguiente es el término desestabilizante para las ondas de deriva y proviene del desfase adicional entre potencial y densidad fluctuantes debido a la respuesta no-adiabática de los electrones atrapados, siendo D_{eff} una difusividad poloidal negativa. Identificando este factor con (2.19) obtenemos su relación con el desfase, $\delta \simeq k_{\theta} D_{\text{eff}}/V_{*n}$. El quinto término proporciona amortiguamiento en dirección paralela al campo magnético para los iones con velocidad sónica c_s y frecuencia de colisión ν_i . A diferencia del resto de términos, que se derivan de la ecuación de continuidad junto con la relación de Boltzmann, este último se introduce “ad hoc” para modelar el amortiguamiento paralelo. El penúltimo término es el término no-lineal debido a la convección por la deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Proviene del término $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \cdot \nabla \tilde{n}_i$ de la ecuación de continuidad y es consecuencia de la respuesta no-adiabática de los electrones atrapados. El último término es la no-linealidad debida a la deriva de polarización. Proviene de $n_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{pol}^c$, siendo $\tilde{\mathbf{V}}_{pol}^c$ la componente convectiva de dicha deriva. Al comparar ambas no-linealidades, se observa que la primera de ellas domina a longitudes grandes debido a que tiene una derivada espacial menos. Haciendo los *orderings* correspondientes para cada término obtenemos,

$$L_n D_{\text{eff}} \left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \tilde{n} \sim L_n D_{\text{eff}} k_{\perp}^2 k_{\theta}, \quad (2.27)$$

$$c_s \rho_s [\nabla_{\perp} \tilde{n} \times \hat{z}] \cdot \nabla_{\perp} (\rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \tilde{n}) \sim c_s \rho_s^3 k_{\perp}^4. \quad (2.28)$$

Bajo la aproximación $k_{\perp} \simeq k_{\theta}$ llegamos a,

$$\frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}{\text{polarización}} \sim \frac{L_n D_{\text{eff}}}{c_s \rho_s^3 k_{\theta}}. \quad (2.29)$$

Más adelante se verá que este cociente es mucho mayor que la unidad, por lo que sólo se retendrá la no-linealidad $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. La no-linealidad debida a la deriva de polarización sólo afecta a longitudes de onda mucho más pequeñas que las que se manejan en este modelo, o equivalentemente, a modos caracterizados por un número de onda muy grande.

2.2.7. Energía fluctuante

Para una mejor comprensión de las propiedades de este modelo consideremos la energía fluctuante,

$$E = \frac{1}{2} \int dV (|\tilde{n}|^2 + \rho_s^2 |\nabla_\perp \tilde{n}|^2). \quad (2.30)$$

El primero de los sumandos da cuenta de la energía interna y el segundo de la energía cinética. Su evolución temporal se obtiene multiplicando (2.26) por \tilde{n}_i e integrando a todo el espacio,

$$\frac{dE}{dt} = \int dV D_{\text{eff}} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{c_s^2}{\nu_i} \int dV (\nabla_\parallel \tilde{n})^2. \quad (2.31)$$

La fuente de energía es el término desestabilizante o *drive* de las ondas de deriva mientras que el sumidero es el término de amortiguamiento colisional paralelo. Así, en ausencia de *drive* y de amortiguamiento la energía se conserva. Esta es la única cantidad conservada por este modelo, debido a la presencia del término no-lineal $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Los sistemas turbulentos con un único invariante transfieren energía de longitudes de onda grandes ($|\mathbf{k}| \ll 1$) a longitudes de onda pequeñas ($|\mathbf{k}| \gg 1$). Es lo que se llama cascada directa de energía. La energía depositada en los modos linealmente estables es disipada.

2.2.8. Evolución del perfil promedio

Hasta ahora, todo lo que hemos visto era referido a la evolución de las fluctuaciones de la densidad, sin tener en cuenta el perfil promedio $\langle n \rangle$. A continuación consideraremos la evolución de este último. La ecuación de evolución se obtiene promediando a los dos ángulos la expresión (2.26), obteniéndose,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle n \rangle - \rho_s^2 \nabla_r^2 \langle n \rangle) = \left\langle L_n D_{\text{eff}} \left[\nabla_\perp \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_\perp \hat{n} \right\rangle. \quad (2.32)$$

Donde los paréntesis angulares denotan promedio angular. A esta ecuación, que acopla promedio con fluctuaciones, se le puede añadir un término difusivo, cuyo coeficiente de difusión sea un parámetro, con el fin de estudiar la interacción entre transporte turbulento y difusivo. En ese caso será necesario incluir además una fuente que compense las pérdidas por difusión (aparte de las que se produzcan por transporte turbulento). La ecuación completa para la evolución del perfil promedio queda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle n \rangle - \rho_s^2 \nabla_r^2 \langle n \rangle) = & S(r, t) + \nabla_r [D_{\text{ext}}(r) \nabla_r (\langle n \rangle - n_0)] \\ & + \left\langle L_n D_{\text{eff}} \left[\nabla_\perp \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_\perp \hat{n} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

El término fuente se expresa formalmente como suma de dos componentes, $S(r, t) = S_0(r) + \tilde{S}(r, t)$. S_0 es constante en el tiempo y puede ser asociada, por ejemplo, a calentamiento con neutros. Su dependencia radial vendría dada, en ese caso, por el perfil de deposición del haz. En cambio, $\tilde{S}(r, t)$ representa la parte fluctuante de la fuente, de ahí su dependencia en r y t . Supondremos que la variación temporal de la parte fluctuante es lenta en relación a las escalas temporales asociadas a las fluctuaciones, de ahí su independencia respecto a las variables angulares. De este último supuesto se deriva la existencia de dos escalas temporales bien diferenciadas, una asociada a las fluctuaciones y otra a las cantidades promedio.

Por otra parte, la solución estacionaria de equilibrio, n_0 , viene dada por el balance entre las fuentes (S_0) y las pérdidas por difusión,

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = S_0(r) + \nabla_r [D_{\text{ext}}(r) \nabla_r n_0]. \quad (2.34)$$

Combinando (2.33) y (2.34) obtenemos finalmente la ecuación de evolución para la densidad promedio,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle n \rangle - n_0 - \rho_s^2 \nabla_r^2 \langle n \rangle) &= \tilde{S}(r, t) + \nabla_r [D_{\text{ext}}(r) \nabla_r (\langle n \rangle - n_0)] \\ &+ \left\langle L_n D_{\text{eff}} \left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \hat{n} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

El término entre paréntesis angulares representa el acoplo entre perfil y fluctuaciones, es decir, refleja la influencia de éstas sobre aquel y por consiguiente sobre el transporte. Además, la energía libre almacenada en el perfil en forma de gradientes influye en la evolución de las fluctuaciones (2.26) a través de los términos correspondientes al drive, a la deriva diamagnética y a los acoplos no lineales. Por lo tanto este modelo es muy útil para estudiar la influencia mutua entre fluctuaciones y perfil.

Capítulo 3

Análisis lineal

En este capítulo se hará un estudio pormenorizado de las propiedades de estabilidad lineal de nuestro modelo DTEM [Ec. (2.26)]. Debido a la presencia del término no lineal, hacer un estudio analítico completo de la ecuación diferencial en derivadas parciales es imposible, pero sí que es posible extraer información de sus propiedades lineales de manera analítica. Además, dichos resultados se contrastarán con los numéricos y así podremos verificar el correcto funcionamiento del código que después se utilizará para resolver el problema no lineal.

Es importante conocer las propiedades de estabilidad lineal del plasma a la hora de establecer los regímenes bajo los que podrían darse fenómenos de transporte. Si los perfiles de densidad y temperatura son estables frente a modos DTEM no se desarrollará este tipo de turbulencia y se evitará la pérdida de confinamiento que conlleva.

El comportamiento lineal es por lo tanto de gran utilidad a la hora de entender los resultados no lineales.

3.1. Cantidades de equilibrio

La geometría cilíndrico-toroidal de nuestro problema obliga a introducir perfiles radiales para todas y cada una de las magnitudes físicas involucradas en el problema. Por lo tanto, en primer lugar haremos un repaso de los perfiles de las cantidades de equilibrio del plasma sobre el que se va a resolver las ecuaciones de nuestro modelo. Supondremos que el plasma está confinado en un tokamak cuya razón de aspecto vale 4, por lo tanto $\varepsilon = 0.25$. El valor del campo magnético axial será de 1 Tesla y la expresión para el factor de seguridad la elegimos parabólica,

$$q(r) = A + Br^2. \quad (3.1)$$

Siendo $A = 1.3$, $B = 0.5$ y r la variable radial normalizada al radio menor ($r \in [0, 1]$). El perfil de densidad de equilibrio normalizado (al valor en $r = 0$) vale,

$$n_0(r) = 1 - r^2, \quad (3.2)$$

siendo $n_0(r = 0) = 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Supondremos que los perfiles de temperatura electrónica e iónica son iguales,

$$T_0^e(r) = T_0^i(r) = (1 - r^2)^2, \quad (3.3)$$

con $T_0(r = 0) = 100 \text{ eV}$. En la Fig. 3.1 se muestran los perfiles normalizados. Los valores elegidos para n_0 y T_0 son tales que el parámetro $\eta = L_n/L_T$ es constante a lo largo de todo r y su valor es $\eta = 2$. A partir de estas cantidades funda-

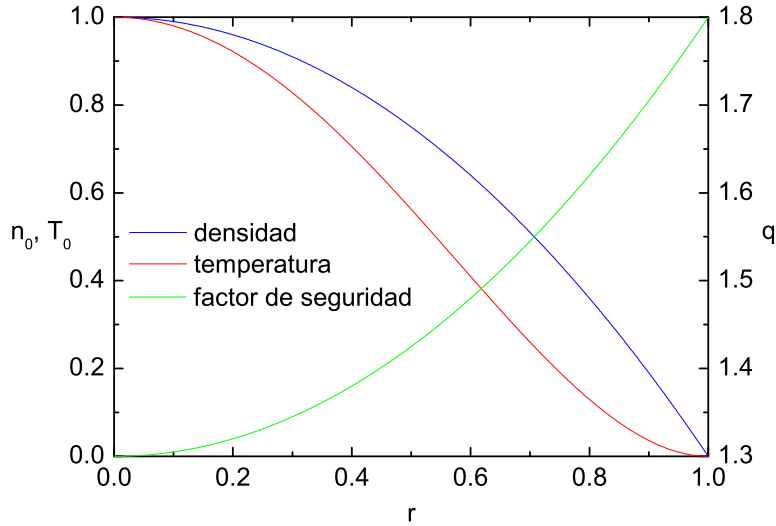


Figura 3.1: Perfiles de equilibrio normalizados de densidad y temperatura, así como del factor de seguridad en función del radio normalizado.

mentales surgen otras derivadas y que son importantes a la hora de describir el comportamiento del plasma. Como magnitudes con dimensión de longitud (L) caben resaltar, aparte de los radios mayor y menor (R_0 y a), el radio de giro iónico $\rho_s = c_s/\Omega_i$ y las longitudes características de densidad L_n , temperatura L_T y shear magnético L_S . En la Fig. 3.2 se pueden ver los perfiles de los tres últimos. Con dimensión de velocidad (LT^{-1}) se definen la velocidad sónica iónica $c_s = (T_0/m_i)^{1/2}$ y la velocidad de deriva diamagnética $V_{*n} = \frac{c_s \rho_s}{L_n}$ [Fig. 3.3(a)] y con dimensión de inversa del tiempo (T^{-1}), aparte de la frecuencia ciclotrónica iónica Ω_i , se definen la frecuencia de colisión iónica ν_i , la frecuencia de colisión efectiva de los electrones atrapados $\nu_{\text{eff}} = \nu_e/\varepsilon$ y la frecuencia de deriva diamagnética $\omega_{*e} = \frac{1}{r} V_{*n}$ [Fig. 3.3(b)]. También cabe resaltar la distribución radial del coeficiente del término fuente, D_{eff} y del término disipativo c_s^2/ν_i , ambos fundamentales en los procesos

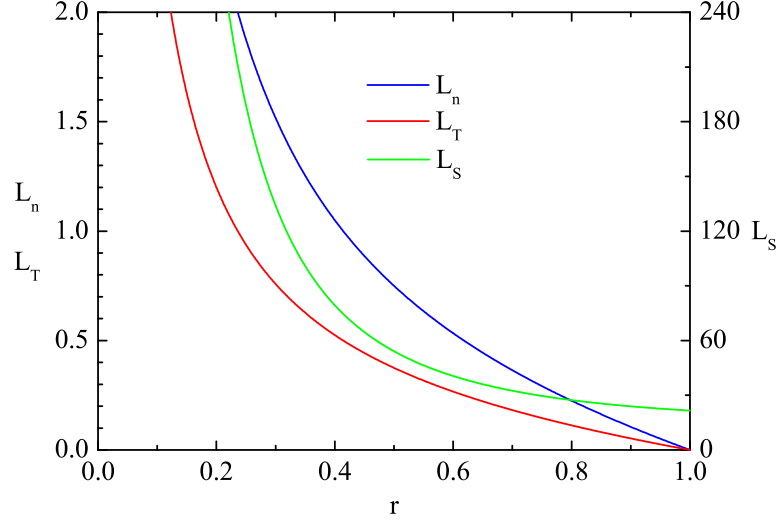


Figura 3.2: Perfiles de equilibrio de las longitudes características de densidad, temperatura y shear magnético en función del radio normalizado.

de desestabilización y estabilización respectivamente. Más adelante, cuando se resuelva el problema no lineal, veremos su importancia. En la Fig. 3.4 se muestra la disposición radial de ambos.

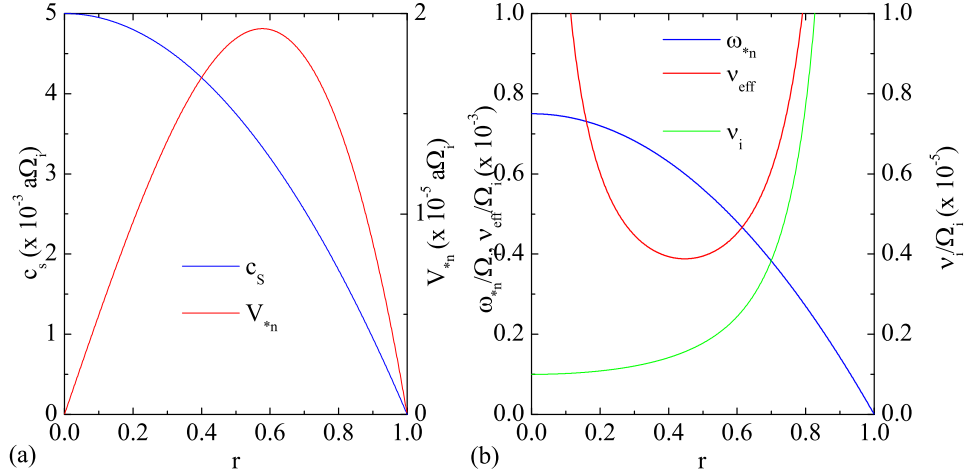


Figura 3.3: Perfiles de equilibrio de las velocidades sónica iónica y de deriva diamagnética (a) y de las frecuencias de deriva diamagnética, de colisión iónica y de colisión efectiva de los electrones atrapados (b).

El análisis lineal se realiza en función de los modos de Fourier de la densidad debido a la geometría del problema. De esto se hablará a continuación, en la

sección 3.2. Así, las helicidades¹ localizadas en las inmediaciones del máximo de la función D_{eff} serán las más fácilmente desestabilizadas al tener más energía libre disponible, en cambio las que se sitúen en las colas prácticamente no tendrán *drive*. Lo contrario sucede cuando nos fijamos en el coeficiente del término disipativo. En este caso, las zonas en las que la función adquiera valores altos serán zonas con mayor estabilidad y viceversa. Globalmente, cuando el efecto del término fuente predomine sobre el efecto del término disipativo se generará inestabilidad y los modos crecerán. En caso contrario los modos permanecerán estabilizados.

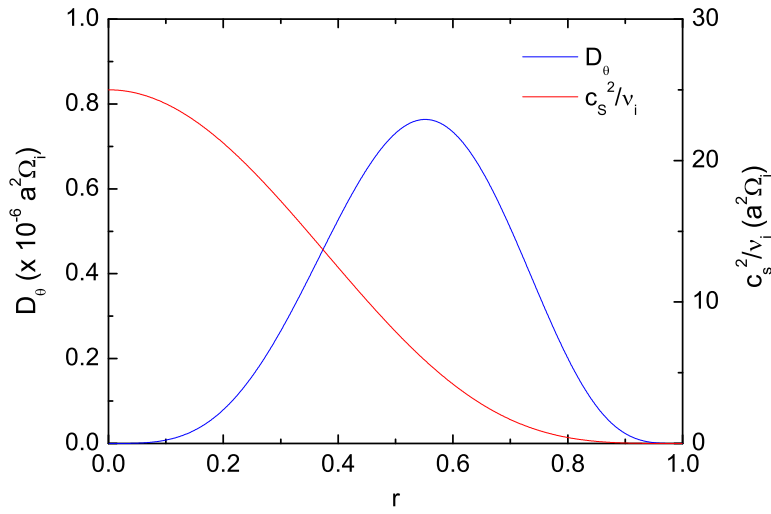


Figura 3.4: Perfiles de los coeficientes del término fuente $D_{\text{eff}}(r)$ y disipativo c_s^2/ν_i para los modos DTEM.

3.2. Desarrollo de las autofunciones lineales

En esta sección se presenta el estudio de las propiedades lineales de las ondas de deriva. El procedimiento es análogo al utilizado por Carreras et al. [35]. Para ello se toma la versión linealizada del modelo [Ec. (2.26)]. Esta ecuación puede ser escrita en el espacio de Fourier debido a la geometría del problema, que tiene periodicidad en las coordenadas angulares. Como las perturbaciones de la densidad son pequeñas respecto al valor de equilibrio, la densidad total fluctuante podrá ser descrita como el sumatorio de una serie de ondas lineales. Este sumatorio representa los distintos modos de Fourier para las fluctuaciones,

$$\tilde{n}(r, \theta, \zeta; t) = \sum_{m,n} \tilde{n}_{m,n}(r) e^{i(m\theta + n\zeta)} e^{i\omega t}, \quad (3.4)$$

¹La helicidad de un modo es el cociente m/n , con m y n enteros y sin divisores comunes.

donde se está suponiendo que la parte temporal de la solución se puede escribir como una exponencial compleja. Los números enteros m y n representan los números de onda poloidal y toroidal en geometría cilíndrico-toroidal. Los operadores diferenciales que actúan sobre las fluctuaciones quedan,

$$\nabla_\theta = i \frac{m}{r}, \quad \nabla_\zeta = i \frac{n}{R_0}, \quad \nabla_\parallel = i \left(n - \frac{m}{q} \right). \quad (3.5)$$

Modos con $(m, n) \neq (0, 0)$ tienen promedio nulo sobre cada superficie magnética por lo tanto el modo $(m, n) = (0, 0)$ equivale al promedio angular a toda la superficie magnética de la densidad fluctuante, es decir, constituye la modificación promediada a la superficie magnética de la densidad inicial o de equilibrio. Haciendo el promedio angular a la densidad obtenemos,

$$\langle n \rangle = \langle n_0 + \tilde{n} \rangle = \langle n_0 \rangle + \langle \tilde{n} \rangle = n_0 + \tilde{n}_{(0,0)}. \quad (3.6)$$

Los modos cuyo cociente entre el número de onda poloidal y toroidal m/n coincida con el valor de $q(r)$ tendrán un valor de k_\parallel nulo [Ec. (3.5)], es decir, el término estabilizante será nulo para ellos en las cercanías de las superficies racionales. Debido a esto, cada modo se sitúa en determinadas posiciones radiales: aquellas en las que el valor del factor de seguridad coincide con el cociente m/n , que es un número racional [39]. Por eso a tales lugares se les denomina superficies racionales y los modos inestables se encuentran localizados en las inmediaciones de éstas.

3.3. Aproximación local

Dado que las autofunciones están situadas en las proximidades de las superficies racionales, es de esperar que los diferentes modos se localicen en un entorno cercano a éstas y que lejos de ellas su valor sea nulo. Debido a esto, se puede transformar la geometría cilíndrica a geometría tipo *slab*², tal y como se muestra en la Fig. 3.5. Analíticamente es equivalente a evaluar las cantidades en el punto en el que se localiza la superficie racional, sin tener en cuenta el efecto de los perfiles en zonas adyacentes. Esta aproximación será tanto mejor cuanto menor sea el cociente $\Delta_{m,n}/L_i$, siendo $\Delta_{m,n}$ la anchura del modo y L_i la longitud típica en la que varía el perfil de equilibrio de la magnitud i .

La utilización de la aproximación local se hace necesaria si se quiere estimar analíticamente la solución para las ondas lineales y así poder extraer información acerca de su comportamiento frente a las diferentes magnitudes ya vistas en la sección 3.1. Además, como ya se dijo en la introducción de este capítulo, nos servirá para poder verificar el correcto funcionamiento del código que posteriormente se utilizará para resolver el problema no lineal.

²En inglés, tabla. Según esta geometría, las coordenadas cilíndricas radial, poloidal y toroidal se convierten en las cartesianas x , y y z respectivamente.

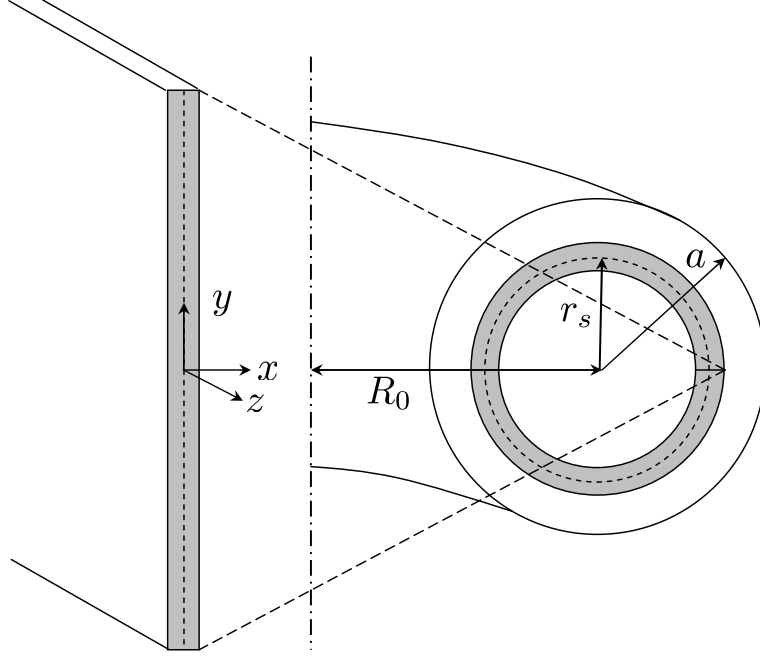


Figura 3.5: Geometría slab (izquierda), y su relación con la geometría toroidal en torno a la posición radial $r = r_s$ (derecha).

El desarrollo de las ondas lineales en el espacio de Fourier en geometría cilíndrico-toroidal, [Ec. (3.4)], queda transformado bajo la aproximación local en,

$$\tilde{n}(x, y, z; t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{n}_{\mathbf{k}}(x) e^{i(k_y y + k_z z)} e^{i\omega t}, \quad (3.7)$$

donde para cada componente $\tilde{n}_{\mathbf{k}}(x)$, se define x como la distancia a la superficie racional asociada al modo $\mathbf{k} = (k_y, k_z)$.

3.3.1. Solución para el problema de autovalores

Sustituyendo la expresión (3.7) para la densidad en la Ec. (2.26) en geometría slab y omitiendo los términos no lineales, que son de segundo orden en las fluctuaciones, obtenemos la ecuación linealizada para las ondas en el espacio de Fourier bajo la aproximación local. En la derivación de dicha ecuación, haremos distinción entre los casos que no tengan una velocidad poloidal de equilibrio con cizalla (shear flow) y los que sí.

(A) Flujo poloidal de equilibrio con shear = 0

En este caso la ecuación linealizada bajo la aproximación local queda,

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_{\mathbf{k}}}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_s^2} \left(1 + k_y^2 \rho_s^2 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \tilde{n}_{\mathbf{k}} - i \left(\frac{x^2}{\Delta_{\mathbf{k}}^4} - \frac{D_y k_y^2}{\omega \rho_s^2} \right) \tilde{n}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (3.8)$$

donde el parámetro $\Delta_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\omega \nu_i \rho_s^2 L_s^2}{k_y^2 c_s^2} \right)^{1/4}$ define la anchura básica del modo \mathbf{k} .

La Ec. (3.8) es una ecuación de autovalores resoluble analíticamente, que se puede identificar con la ecuación de Hermite, cuya solución viene dada en función de los polinomios que llevan el mismo nombre,

$$\tilde{n}_{\mathbf{k}}(x) = \bar{n} H_l(\sqrt{\alpha_{\mathbf{k}}} x) \exp(-\alpha_{\mathbf{k}} x^2/2), \quad (3.9)$$

siendo $H_l(x)$ el polinomio de Hermite de orden l , \bar{n} una constante y $\alpha_{\mathbf{k}}^2 = i/W_{\mathbf{k}}^4$.

Relación de dispersión

Sustituyendo la solución para las autofunciones en (3.8) se obtiene la siguiente relación de dispersión,

$$\omega = \lambda_1 \left[1 + i\lambda_2 - (2l+1) \frac{1+i}{\sqrt{2}} \lambda_3 \right], \quad (3.10)$$

con

$$\lambda_1 = \frac{\omega_{*e}}{1 + k_y^2 \rho_s^2}, \quad \lambda_2 = \frac{k_y^2 D_y}{\omega_{*e}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{\omega c_s^2 k_y^2 \rho_s^2}{\nu_i L_s^2 \omega_{*e}^2}}.$$

Según esto, se obtendrán diferentes frecuencias en función del número de onda radial l . Para valores de l grandes, los modos radiales tienden hacia una estabilidad marginal, como se desprende en el límite de (3.10) para $l \rightarrow \infty$,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \omega = -i \frac{(\omega_{*e} + i k_y^2 D_y)^2}{(2l+1)^2} \frac{\nu_i L_s^2}{c_s^2 k_y^2 \rho_s^2}. \quad (3.11)$$

La frecuencia de cada modo consta de una parte real y otra imaginaria ($\omega = \omega_r + i\gamma$). La parte real representa la frecuencia de oscilación de la onda, mientras que la parte imaginaria representa la tasa lineal de crecimiento. Al tratarse de un número complejo, la Ec. (3.10) se puede reescribir como dos ecuaciones algebraicas acopladas, una para la parte real y otra para la imaginaria,

$$\begin{aligned} \omega_r &= A [1 + B(C - D)] \\ \gamma &= A [E - B(C + D)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

siendo

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\omega_{*e}}{1 + k_y^2 \rho_s^2}, \\
B &= (2l + 1) \frac{\rho_s^2}{\sqrt{2\omega_{*e}} W_{\mathbf{k}}^2} (\omega_r^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{4}}, \\
C &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_r}{\sqrt{\omega_r^2 + \gamma^2}}}{2}}, \\
D &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega_r}{\sqrt{\omega_r^2 + \gamma^2}}}{2}}, \\
E &= \frac{k_y^2 D_y}{\omega_{*e}}.
\end{aligned}$$

(B) Flujo poloidal de equilibrio con shear $\neq 0$

Consideremos a continuación la existencia de una velocidad poloidal, que bajo la aproximación local puede escribirse de la siguiente manera,

$$\langle V_y(x) \rangle = \langle V_y(0) \rangle + x \langle V'_y(0) \rangle. \quad (3.13)$$

$\langle V_y(0) \rangle$ es el valor del flujo poloidal en la superficie racional y $\langle V'_y(0) \rangle$ es la derivada radial de dicha velocidad en la superficie racional. El primer término introduce un desplazamiento Doppler en la frecuencia, $\omega_E = k_y \langle V_y(0) \rangle$, mientras que el shear flow que introduce el segundo término cambia la forma del potencial efectivo en la ecuación de autovalores, de forma que la Ec. (3.8) queda modificada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{n}_{\mathbf{k}}}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_s^2} \left(1 + k_y^2 \rho_s^2 - \frac{\omega_{*e}}{\bar{\omega}} \right) \tilde{n}_{\mathbf{k}} - i \left(\frac{x^2}{\Delta_{\mathbf{k}}^4} - \frac{D_y k_y^2}{\bar{\omega} \rho_s^2} \right) \tilde{n}_{\mathbf{k}} \\
+ \frac{k_y \langle V'_y(0) \rangle x}{\bar{\omega} \rho_s^2} \tilde{n}_{\mathbf{k}} = 0.
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora $\bar{\omega}$ se refiere a la frecuencia corregida por el efecto Doppler del término constante del flujo poloidal, $\bar{\omega} \equiv \omega - \omega_E$.

El efecto del shear flow es la introducción del último término en la Ec. (3.14), que modifica el potencial efectivo rompiendo la simetría espacial. Ahora, la anchura de las autofunciones lineales vale $\Delta_{\mathbf{k}} = (\bar{\omega} \nu_i \rho_s^2 L_s^2 / k_y^2 c_s^2)^{1/4}$.

Para medir el efecto del shear flow se define el parámetro S que representa una frecuencia normalizada de shear,

$$S = \frac{\omega_s}{\bar{\omega}} = \frac{k_y \langle V'_y(0) \rangle_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}}{\bar{\omega}}, \quad (3.15)$$

siendo ω_s la frecuencia asociada al shear flow.

Introduciendo S en la Ec. (3.14) y reagrupando obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{n}_{\mathbf{k}}}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_s^2} \left(1 + k_y^2 \rho_s^2 - \frac{\omega_{*e}}{\bar{\omega}} - i \frac{D_y k_y^2}{\bar{\omega}} + i \frac{\Delta_{\mathbf{k}}^2 S^2}{4 \rho_s^2} \right) \tilde{n}_{\mathbf{k}} \\ - i \frac{1}{\Delta_{\mathbf{k}}^4} (x + i \xi_{\mathbf{k}})^2 \tilde{n}_{\mathbf{k}} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

El parámetro $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}^3 S}{2 \rho_s^2}$ representa el desplazamiento de la autofunción respecto de la posición de la superficie racional. Es proporcional a la tasa de shearing y es un término estabilizante en (3.16). Para el caso $l = 0$, la autofunción solución es,

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{\mathbf{k}}(x) = \bar{n} \exp \left(\frac{1 + i \xi_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{2} W_{\mathbf{k}}^2} \right) \exp \left[-\frac{(x - \xi_{\mathbf{k}})^2}{2 \sqrt{2} W_{\mathbf{k}}^2} \right] \\ \times \exp \left[-i \frac{(x + \xi_{\mathbf{k}})^2}{2 \sqrt{2} W_{\mathbf{k}}^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

El segundo factor exponencial es la envolvente gaussiana y el tercer factor exponencial es un término oscilatorio que da cuenta de la propagación radial de la onda. El parámetro $W_{\mathbf{k}}$ es la anchura de la autofunción, $\Delta_{\mathbf{k}}$, cuando $\bar{\omega} = \omega_{*e}$. Análogamente, Ω_s es la frecuencia asociada al shear flow cuando $\bar{\omega} = \omega_{*e}$, es decir, $\Omega_s \equiv \omega_s / \omega_{*e}$. El desplazamiento de las autofunciones se redefine también en función de Ω_s , $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}^3 \Omega_s}{2 \rho_s^2}$.

Relación de dispersión

Análogamente a lo que se hacía en el apartado (A), encontramos la correspondiente relación de dispersión,

$$\bar{\omega} = \omega - \omega_E = \lambda_1 \left[1 + i (\lambda_2 - \lambda_3) - (2l + 1) \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \lambda_4 \right], \quad (3.18)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\omega_{*e}}{1 + k_y^2 \rho_s^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{k_y^2 D_y}{\omega_{*e}}, \\ \lambda_3 &= \frac{W_{\mathbf{k}}^2 \Omega_s^2}{4 \rho_s^2}, \\ \lambda_4 &= \sqrt{\frac{\bar{\omega} c_s^2 k_y^2 \rho_s^2}{\nu_i L_s^2 \omega_{*e}^2}}. \end{aligned}$$

Y nuevamente se puede reescribir (3.18) como dos ecuaciones acopladas,

$$\begin{aligned}\omega_r &= A[1 + B(C - D)] \\ \gamma &= A[E - F - B(C + D)],\end{aligned}\tag{3.19}$$

siendo en este caso

$$\begin{aligned}A &= \frac{\omega_{*e}}{1 + k_y^2 \rho_s^2}, \\ B &= (2l + 1) \frac{\rho_s^2}{\sqrt{2\omega_{*e}} W_{\mathbf{k}}^2} (\omega_r^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{4}}, \\ C &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_r}{\sqrt{\omega_r^2 + \gamma^2}}}{2}}, \\ D &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega_r}{\sqrt{\omega_r^2 + \gamma^2}}}{2}}, \\ E &= \frac{k_y^2 D_y}{\omega_{*e}}, \\ F &= \frac{\xi_{\mathbf{k}}^2 \rho_s^2}{W_{\mathbf{k}}^4}.\end{aligned}$$

3.4. Resultados lineales

En esta sección se expondrán los resultados analíticos del modelo lineal según la aproximación local y los resultados numéricos según el modelo lineal completo. Hay que recordar que en el primer caso se utilizará geometría tipo slab (las cantidades no varían según la coordenada radial) y en el segundo se utilizará geometría cilíndrica (se tienen en cuenta los perfiles).

3.4.1. Resultados analíticos bajo la aproximación local

Autofunciones solución del problema de autovalores

En el apartado 3.3.1 obtuvimos las soluciones para la ecuación de autovalores y la relación de dispersión respectivamente. En ambos casos aparecía el número de onda radial debido a la dependencia que las autofunciones tienen con los polinomios de Hermite, que modulan el término exponencial. En la figura 3.6(a) se representa la parte real de las autofunciones solución [Ec. (3.9)] del problema de autovalores para diferentes números de onda radial l . Para números de onda radial impar todas tienen un nodo en el origen debido a la raíz que dichos polinomios presentan en $x = 0$. Además, a medida que aumenta el número de onda radial

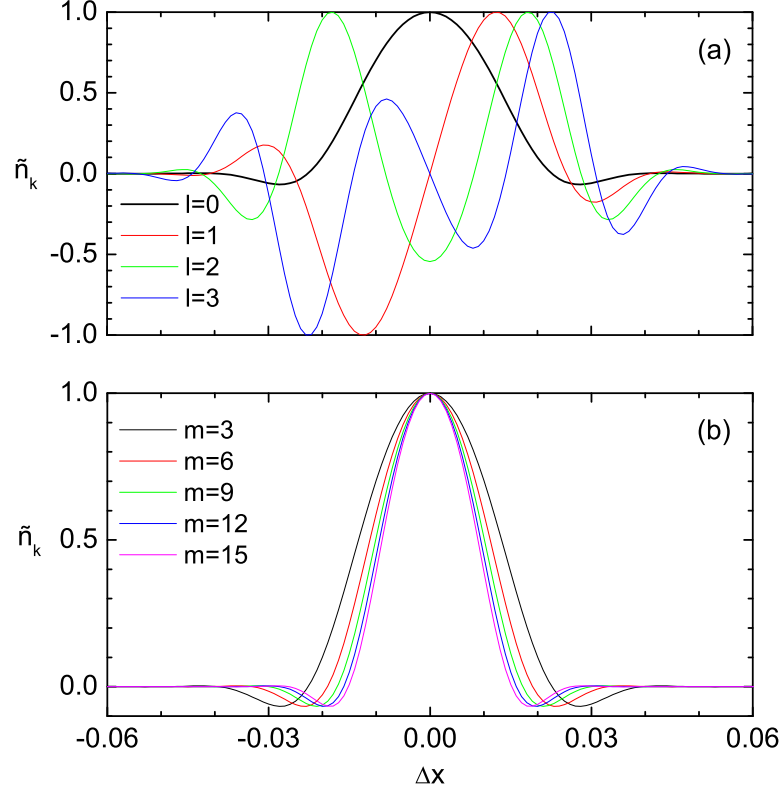


Figura 3.6: (a) Autofunciones solución (parte real) del problema de autovalores para el modo $(m, n) = (3, 2)$ en función del número de onda radial. (b) Autofunciones solución (parte real) del problema de autovalores para diferentes modos (m, n) , con número de onda radial $l = 0$.

aumenta su anchura. En la sección 3.3.1 se definía la anchura de las autofunciones como $\Delta_{\mathbf{k}} = (\omega \nu_i \rho_s^2 L_s^2 / k_y^2 c_s^2)^{1/4}$. En la Fig. 3.6(b) se muestra la parte real de las autofunciones solución [Ec. (3.9)] del problema de autovalores para diferentes números de onda \mathbf{k} y número de onda radial $l = 0$. La disposición radial de todas ellas es similar, pero a medida que aumenta k_y la anchura disminuye.

Frecuencia compleja: Tasas de crecimiento y frecuencia real

El hecho de que exista una relación de dispersión indica que la frecuencia compleja depende del número de onda \mathbf{k} , es decir, las ondas lineales son dispersivas. A continuación analizaremos la dependencia de las tasas de crecimiento (γ) y las frecuencias reales (ω_r) de los distintos modos del espectro con los números de onda.

Los sistemas de ecuaciones algebraicas dados por (3.12) y (3.19) se pueden resolver con el método de Newton. Utilizaremos la aplicación matemática MathCad que resuelve sistemas de ecuaciones mediante el método Levenberg-Marquard, una

derivación del de Newton.

Nos centraremos en la superficie racional $q(r) = 3/2$, situada en torno al punto radial $r = 0.63 a$. En la Fig. 3.7 se muestran los resultados analíticos con las tasas de crecimiento lineal y las frecuencias de rotación de cada modo \mathbf{k} para $l = 0$. Existe un número de modos inestables, del $(m, n) = (6, 4)$ hasta el $(m, n) = (48, 32)$, para los que la configuración de equilibrio es linealmente supercrítica. A partir de este último los demás son estables. Este equilibrio es linealmente inestable: si se perturba el perfil de densidad los modos linealmente inestables comenzarán a crecer. Existe un máximo de inestabilidad respecto al número de onda k_y (m en

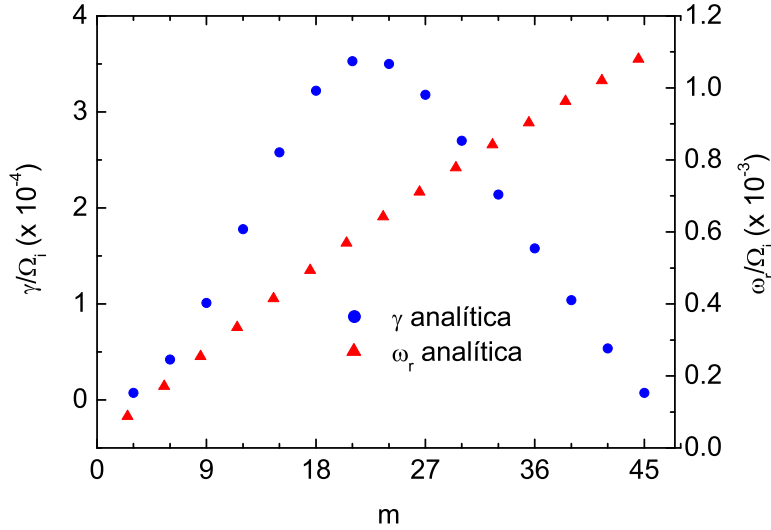


Figura 3.7: Tasas de crecimiento analíticas (puntos azules) y frecuencias de rotación analíticas (triángulos rojos) en función del número de onda poloidal m .

cilíndricas). Esto está en concordancia con el hecho de que el coeficiente efectivo del término fuente,

$$D_{\text{eff}} = \frac{D_\theta}{1 + \left(\frac{k_\theta D_\theta}{V_{*n}} \right)^2}, \quad (3.20)$$

presenta un máximo también, a partir del cual el drive decrece, haciéndose muy pequeño para valores muy altos del número de onda.

Las frecuencias dependen también del número de onda radial l . En la Fig. 3.8 se muestran los resultados para el modo linealmente más inestable. El modo radial dominante es el $l = 0$, tanto para las tasas de crecimiento (a), como para la frecuencia de rotación (b). En ambos casos, a medida que aumenta el número de onda radial la tendencia es asintótica hacia cero. Esto sucede para modos estables e inestables. Como cada modo angular (m, n) tiende a adquirir el número de onda radial que maximice su tasa de crecimiento, tenemos que los modos linealmente

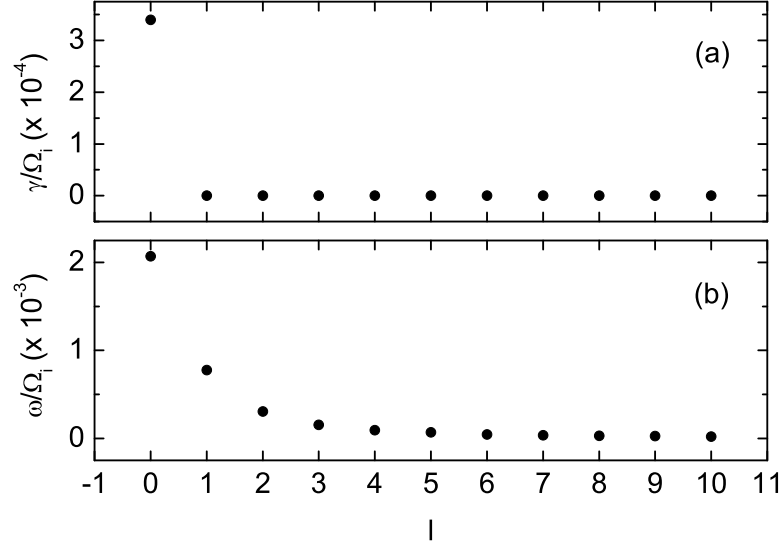


Figura 3.8: Tasas de crecimiento (a) y frecuencias de rotación (b) en función del número de onda radial l , para el modo angular $(m, n) = (27, 18)$.

estables desarrollarán números de onda radiales l cada vez mayores. Este comportamiento asintótico en el espectro de l , sobre todo en el caso de los modos estables, tendrá importantes consecuencias en la fase no lineal, cuando se necesiten tiempos de simulación lo suficientemente grandes como para poder explorar la dinámica del sistema.

3.4.2. Resultados numéricos.

En este apartado se exponen los resultados numéricos de la parte lineal del problema. Con el fin de chequear el código de avance de las ecuaciones DTEM, compararemos las soluciones numéricas con las predichas por la teoría analítica vistas en la sección anterior.

En primer lugar, vamos a comparar las autofunciones solución. En la Fig. 3.9(a) se muestran los resultados analíticos y numéricos. Cabe resaltar la buena concordancia, tanto para la parte real como para la imaginaria, en las soluciones de la autofunción normalizada correspondiente al modo $(m, n) = (15, 10)$. De igual manera se pueden cotejar los resultados numéricos correspondientes a las frecuencias complejas. En la Fig. 3.9(b) se muestran los resultados y nuevamente se observa gran acuerdo entre las soluciones. Hay que notar que para los modos linealmente estables no tiene sentido hablar de solución numérica para $l = 0$ puesto que, como se dijo antes, el modo angular tiende a situarse en el modo radial l que haga máximo su ritmo de crecimiento y esto sucede para $l \rightarrow \infty$ en estos casos. Como el número de onda radial representa el número de nodos, en la práctica resulta

imposible resolverlo de forma numérica.

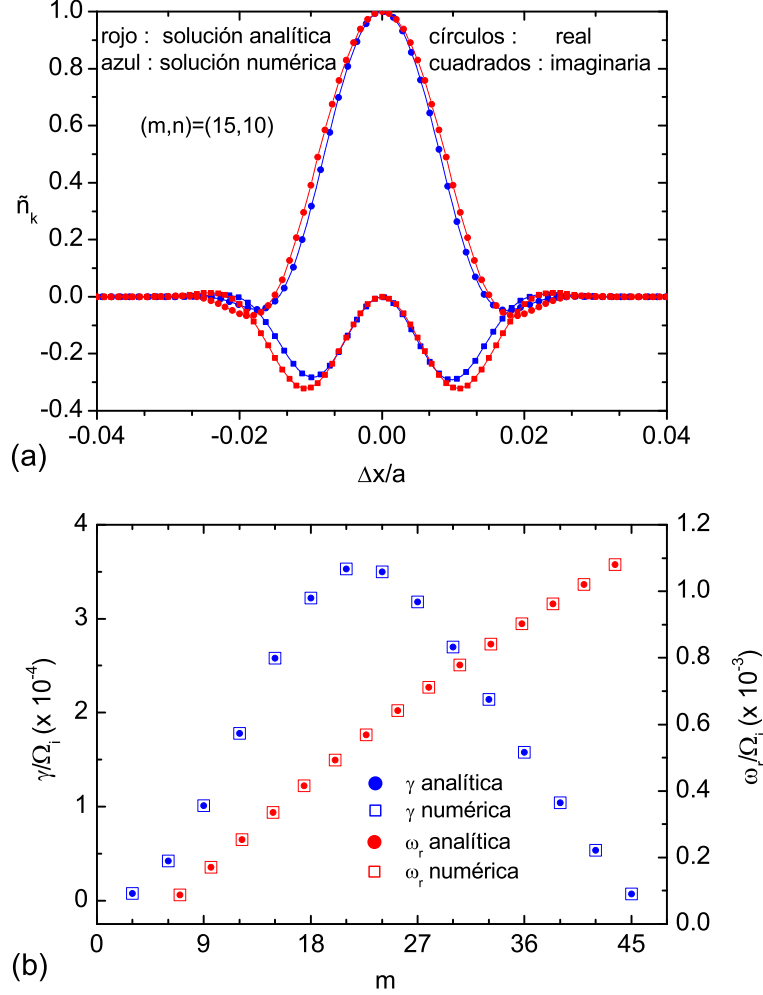


Figura 3.9: (a) Comparativa entre las soluciones analítica y numérica para las partes real e imaginaria de la autofunción solución del problema de autovalores para el modo angular $(m,n) = (15,10)$. (b) Comparativa entre las soluciones analítica y numérica para las tasas de crecimiento y frecuencias de rotación en función del número de onda poloidal.

En la Fig. 3.10 se muestran tasas de crecimiento y frecuencias de rotación para las tres helicidades principales. Las mayores tasas de crecimiento se corresponden con modos pertenecientes a la helicidad $m/n = 10/7$, en consonancia con el hecho de que su localización radial ($r \simeq 0.51 a$) está en las inmediaciones de la zona en la que el coeficiente del término fuente es máximo (ver Fig. 3.4). El valor típico de la frecuencia compleja de las ondas lineales (ω) es aproximadamente un factor $10^3 - 10^4$ menor que la frecuencia ciclotrónica iónica ($\omega \sim 10^{-4} - 10^{-3} \Omega_i$).

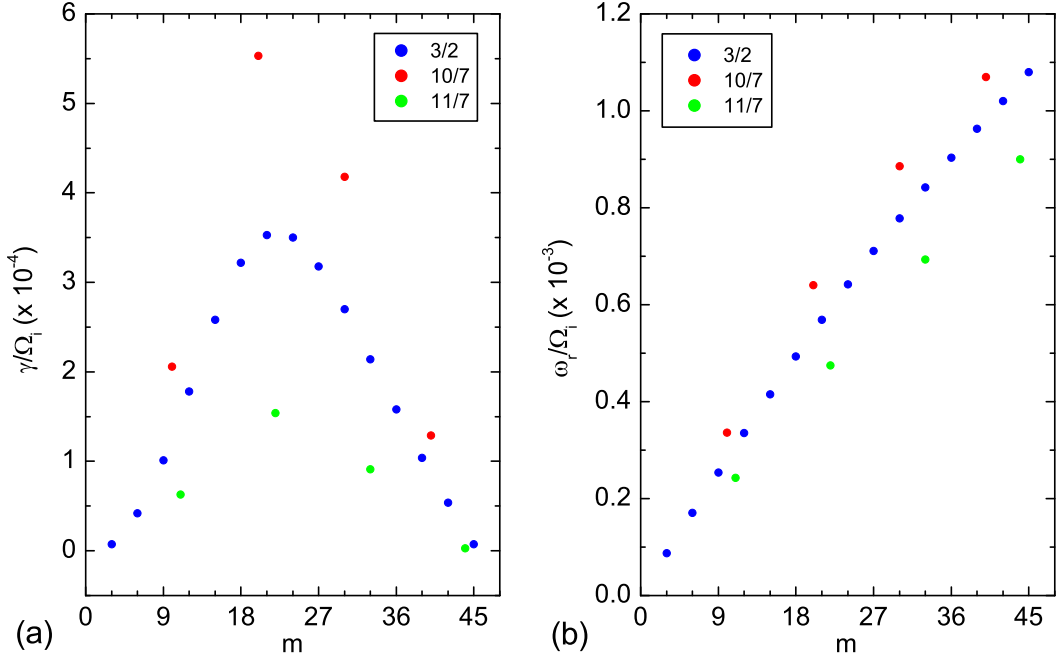


Figura 3.10: Tasas de crecimiento y frecuencias de rotación en función del número de onda poloidal para las tres helicidades principales.

Efectos lineales del shear flow

En la sección 3.3.1 se habló del efecto que un flujo con cizalla tenía sobre la solución de las autofunciones lineales. Como se vio, el hecho de introducir un término impar en x en la ecuación linealizada para las ondas en el espacio de Fourier modificaba el potencial efectivo rompiendo su simetría espacial. Además, las autofunciones lineales quedaban desplazadas respecto a la posición de la superficie racional $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, aumentando el amortiguamiento colisional iónico. El resultado es una estabilización de las ondas lineales debido al término extra que aparece en la relación de dispersión [Ec. (3.18)].

En la Fig. 3.11 se muestran las tasas lineales de crecimiento (a) y las frecuencias de rotación (b) en dos casos con diferentes velocidades poloidales de equilibrio. En el caso en que dicha velocidad no es nula se observa una reducción en las tasas de crecimiento lineal, manteniéndose idénticas las frecuencias de rotación ya que el término extra en la relación de dispersión sólo afecta a la parte imaginaria de la frecuencia compleja. La estabilización lineal de las ondas tiene su origen en el desplazamiento $\xi_{\mathbf{k}}$ de las autofunciones respecto a la posición de la superficie racional [ver Fig. 3.12(a)]. Este desplazamiento hace que las ondas paralelas sean más amortiguadas al estar desplazadas de la racional, donde $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$. En la Fig. 3.12(b) se aprecia la rotura de la simetría en la solución imaginaria debido al término extra en el potencial efectivo.

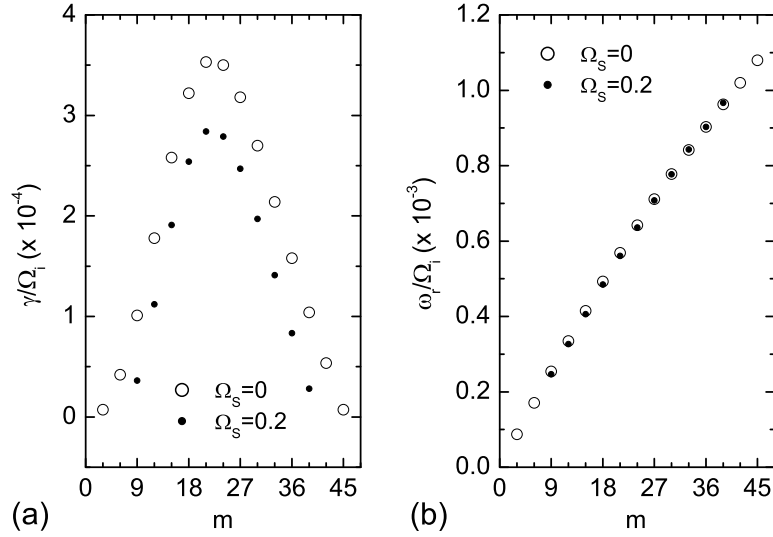


Figura 3.11: (a) Tasas de crecimiento y (b) frecuencias de rotación en función del número de onda poloidal sin flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_s = 0$) y con flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_s = 0.2$).

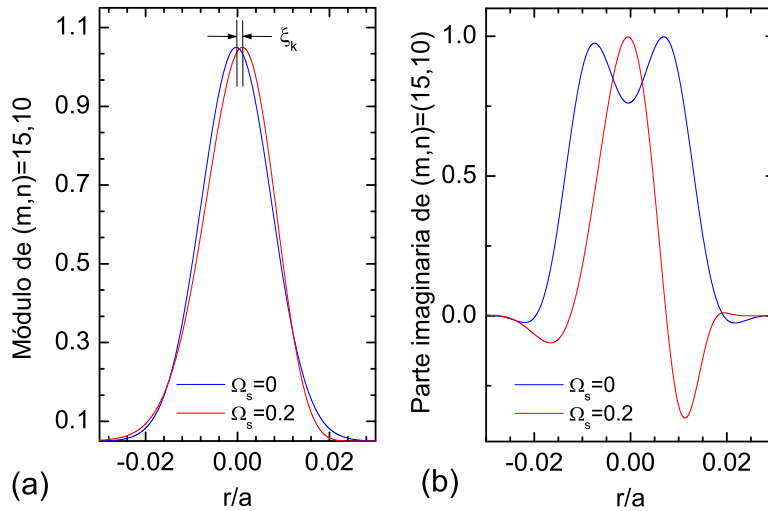


Figura 3.12: (a) Módulos de la autofunción lineal solución del problema de autovalores sin flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_s = 0$) y con flujo poloidal de equilibrio ($\Omega_s = 0.2$). (b) Idem. para la parte imaginaria de la solución

Capítulo 4

Esquema numérico

La necesidad de tratar numéricamente el problema no lineal que presenta nuestro modelo de ondas de deriva obliga a buscar un esquema numérico que sea a la vez estable, preciso y simple. Las dos primeras propiedades son ineludibles para cualquier trabajo de este tipo, ya que se pretende obtener una solución convergente y lo más aproximada posible a la real. La simplicidad del método es importante para reducir en todo lo posible el coste computacional. Esto último es de vital importancia en nuestro caso, ya que para el estudio que se realice posteriormente de las propiedades estadísticas del sistema serán necesarios tiempos de simulación muy grandes.

Las simulaciones fueron realizadas en una de las plataformas de supercomputación del CIEMAT¹, el superordenador JEN50 (SGI Origin 3800) [40].

La implementación numérica del modelo de ecuación para ondas de deriva estudiado en este trabajo se realizó modificando las ecuaciones del código KITE [41] que provee un entorno adecuado para avanzar numéricamente ecuaciones fluidas en geometría cilíndrica.

4.1. Integración espacial

La resolución numérica de la ecuación diferencial en derivadas parciales requiere la definición de un dominio computacional discreto. Recordemos que nuestra geometría es cilíndrica con periodicidad en las tapas (cilíndrico-toroidal). Debido a esta propiedad, podemos desarrollar las fluctuaciones de la densidad en series discretas de Fourier. La expresión resultante es equivalente a la parte espacial de la Ec. (3.4), vista en el capítulo anterior,

$$\tilde{n}(r, \theta, \zeta) = \sum_{m,n>0} [\tilde{n}_{m,n}(r)\cos(m\theta + n\zeta) + \tilde{n}_{-m,-n}(r)\sin(m\theta + n\zeta)], \quad (4.1)$$

¹Centro de Investigaciones Energéticas, Medio Ambientales y Tecnológicas.

donde el desarrollo de las series se ha hecho bajo la formulación seno-coseno en lugar de la exponencial compleja. Tenemos así un método que trata espectralmente a las variables angulares y mantiene en el espacio real a la variable radial. Una descripción detallada de los métodos espectrales puede encontrarse en la referencia [42].

4.1.1. Integración angular. Método espectral

Debido al tratamiento espectral que se dará a las variables angulares, se hace necesario truncar en algún punto la serie infinita de Fourier para poder realizar la implementación numérica. Esto se hace eligiendo un máximo para los números de onda en las direcciones poloidal ($m_{\text{máx}}$) y toroidal ($n_{\text{máx}}$) respectivamente y omitiendo todos los demás que sean mayores, $m > m_{\text{máx}}$ y $n > n_{\text{máx}}$. Si los números de onda de los modos omitidos son lo suficientemente grandes, nos aseguraremos de que los errores de discretización angular describirán variaciones lo suficientemente pequeñas como para que puedan ser despreciadas. Además, dichas variaciones se distribuyen globalmente sobre las variables angulares, contrariamente a lo que sucede en el espacio real (diferencias finitas), cuyos errores de discretización son mucho más locales. En (3.5) se muestran los operadores diferenciales asociados a las fluctuaciones.

Las operaciones se realizan exclusivamente en el espacio de Fourier y los resultados se almacenan espectralmente en las autofunciones radiales $\tilde{n}_{m,n}(x)$ y $\tilde{n}_{-m,-n}(x)$, que siempre están acopladas. La evaluación del término no lineal, que da cuenta de la interacción entre modos, se realiza por medio de la suma de convolución [43]. Esta operación se realiza en la representación exponencial compleja de las autofunciones, por lo que en cada paso temporal primero se realiza la transformación de la notación seno-coseno a exponencial compleja, luego se hace la convolución y finalmente se transforman nuevamente los coeficientes a la notación seno-coseno. Cada modo se convoluciona con todos los demás, obteniéndose así la contribución que sobre él ejerce el resto. La resolución del término no lineal es la operación numérica en la que más tiempo computacional se emplea y escala como el número de modos al cuadrado, por lo tanto la elección del número de modos se ha de hacer en base a un compromiso entre la correcta resolución angular y un gasto computacional asumible.

4.1.2. Integración radial. Diferencias finitas

Las componentes de Fourier dependen de la variable r , por lo que deben ser representadas en una malla radial. Las derivadas radiales se realizan utilizando diferencias finitas a tres puntos, permitiendo así un espaciado no uniforme para poder concentrar un mayor número de nodos en torno a las superficies racionales que es donde existen grandes gradientes. En las extremos de la malla, lejos de las

racionales, no se generan grandes gradientes y el mallado podrá ser mucho más diseminado, tal y como se observa en la Fig. 4.1. En las zonas en las que la sepa-

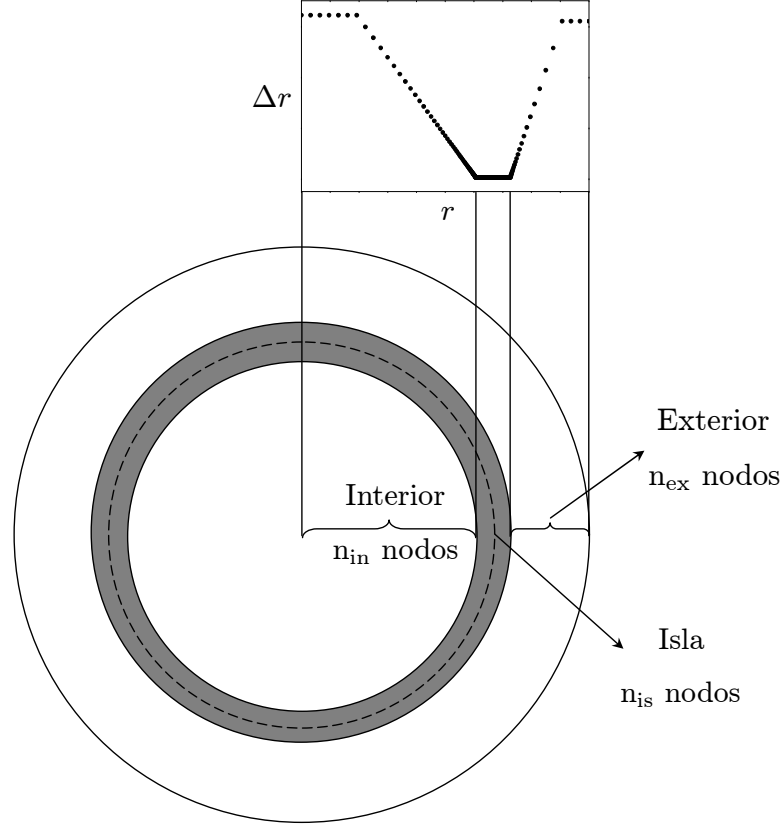


Figura 4.1: En la parte superior se muestra el intervalo de separación entre puntos del mallado en función del radio. En la parte inferior se muestra una sección toroidal donde está resaltada la zona de la isla.

ración entre nodos sea constante, las fórmulas de diferenciación a tres puntos se reducen a la diferenciación centrada usual. Las derivadas radiales quedan,

$$\begin{aligned}\nabla_r \tilde{f} &= c_1^- \tilde{f}_{j-1} - (c_1^- + c_1^+) \tilde{f}_j + c_1^+ \tilde{f}_{j+1}, \\ \nabla_r^2 \tilde{f} &= c_2^- \tilde{f}_{j-1} - (c_2^- + c_2^+) \tilde{f}_j + c_2^+ \tilde{f}_{j+1},\end{aligned}\tag{4.2}$$

siendo \tilde{f}_j el valor numérico de la variable en r_j y c_1^+ , c_1^- , c_2^+ y c_2^- los pesos propios de cada uno de los puntos involucrados [44].

4.1.3. Condiciones de contorno

Debido a que las variables angulares serán tratadas en el espacio de Fourier, implícitamente se está imponiendo periodicidad de las soluciones tanto en la variable

poloidal como en la toroidal bajo giros de 2π radianes,

$$\begin{aligned}\tilde{n}(r, \theta, \zeta; t) &= \tilde{n}(r, \theta + 2\pi, \zeta; t), \\ \tilde{n}(r, \theta, \zeta; t) &= \tilde{n}(r, \theta, \zeta + 2\pi; t).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Respecto a la variable radial, debido a que sólo se generará turbulencia en zonas cercanas a las superficies racionales, exigiremos que las autofunciones se anulen lejos de ellas, en particular, en los extremos de la malla radial. Además, como el problema tiene simetría axial, las autofunciones han de ser suaves en el centro,

$$\begin{cases} \tilde{n}(0, \theta, \zeta; t) = 0, & m \neq 0, \\ \tilde{n}(a, \theta, \zeta; t) = 0, \\ \nabla_r \tilde{n}(0, \theta, \zeta; t) = 0, & m = 0. \end{cases}\tag{4.4}$$

4.2. Integración temporal

La elección de un esquema de integración temporal eficiente es crucial a la hora de resolver la evolución de todos los modos incluidos en el cálculo. Para un valor del paso temporal $\Delta t = 50/\Omega_i$, necesitaremos del orden de 10^5 iteraciones. Este número tan grande es debido, por un lado, a que la dinámica local tiene escalas temporales mucho más pequeñas que las asociadas al transporte y por otro lado, cuando más adelante estudiemos las propiedades estadísticas del sistema, necesitaremos un gran número de datos para tener estadística suficiente de la dinámica global del sistema. Por todo esto, es importante utilizar un algoritmo rápido, pero a la vez estable numéricamente y preciso.

4.2.1. Tratamiento implícito y explícito

Los métodos de integración pueden dividirse en implícitos, explícitos y semi-implícitos. Los primeros son incondicionalmente estables para cualquier paso temporal (aplicados a términos difusivos o viscosos) mientras que los segundos tienen dominios de estabilidad mucho más restringidos. El factor de amplificación, $\xi = \tilde{f}^{t+\Delta t}/\tilde{f}^t$, que da cuenta de la estabilidad del esquema, es siempre menor que la unidad para el tratamiento implícito. El tratamiento explícito en cambio hace que se deba restringir la elección del discretizado, tanto espacial como temporal, para que el método sea estable.

Como veremos en el siguiente apartado, la parte lineal del esquema será tratada de forma implícita, mientras que el término no lineal deberá tratarse de manera explícita ya que un tratamiento implícito de este tipo de términos conlleva un gasto computacional excesivo.

4.2.2. Algoritmo de integración

La ecuación del modelo se puede expresar formalmente para cada modo de la siguiente manera,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbb{L}_{m,n} Y_{m,n}) = \mathbb{R}_{m,n} Y_{m,n} + N_{m,n}(Y). \quad (4.5)$$

$Y_{m,n}$ es un vector columna cuyos elementos son los valores de $\tilde{n}_{m,n}$ en los diferentes puntos de la malla radial; $\mathbb{L}_{m,n}$ y $\mathbb{R}_{m,n}$ son operadores matriciales lineales que actúan en la parte izquierda y derecha de la ecuación respectivamente, con estructura tridiagonal resultante de la diferenciación radial a tres puntos [45].

Se puede resolver el problema suponiendo que los operadores $\mathbb{L}_{m,n}$ y $\mathbb{R}_{m,n}$ son aproximadamente constantes en el tiempo². En este caso se calculan al principio de la simulación y ya no es necesario actualizarlos. En cambio, si queremos estudiar efectos de memoria sobre el perfil, es necesario actualizarlos.

El término no lineal está representado por el vector $N_{m,n}(Y)$ cuyos elementos son la convolución sobre el modo (m, n) de todos los demás en cada uno de los puntos radiales.

Para resolver los términos lineales se empleará un esquema tipo Crank-Nicholson,

$$\mathbb{L}_{m,n} \frac{Y_{m,n}^{t+\Delta t} - Y_{m,n}^t}{\Delta t} = \mathbb{R}_{m,n} \frac{Y_{m,n}^{t+\Delta t} + Y_{m,n}^t}{2}. \quad (4.6)$$

Este método realiza el promedio de la parte derecha de la igualdad entre sus valores al comienzo y al final del paso temporal. Al ser un esquema de orden 2 en el tiempo, las soluciones que aporta tienen precisión de orden $(\Delta t)^2$. Reescribiendo (4.6) de forma que en el miembro de la izquierda se encuentre lo que dependa de $t + \Delta t$ y en el miembro de la derecha lo que dependa de t se obtiene,

$$\left(\mathbb{L}_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^{t+\Delta t} = \left(\mathbb{L}_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^t. \quad (4.7)$$

El miembro de la derecha en (4.7) se puede poner en función de lo que vale el miembro de la izquierda en el paso anterior, simplificando el cálculo y haciendo más eficiente el algoritmo,

$$\left(\mathbb{L}_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^t = 2\mathbb{L}_{m,n} Y_{m,n}^t - \left(\mathbb{L}_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^{t-\Delta t}. \quad (4.8)$$

El término no lineal se trata de manera explícita tal y como se indicó anteriormente. Además, como se pretende obtener soluciones que sean precisas al orden 2 en Δt ,

²Esta aproximación sólo será válida cuando el perfil de densidad sea constante o cambie muy poco o en escalas adiabáticas.

se resuelve en dos semipasos para mantener el orden de consistencia. El esquema de integración queda por lo tanto de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & \left(\mathbb{L}_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^p = \left(\mathbb{L}_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^t + \Delta t N_{m,n}(Y^t) \\
 [2] \quad & \left(\mathbb{L}_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^{t+\Delta t} = \\
 & = \left(\mathbb{L}_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{R}_{m,n} \right) Y_{m,n}^t + \frac{\Delta t}{2} [N_{m,n}(Y^t) + (N_{m,n}(Y^p))] .
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

En el primer semipaso se obtiene una primera estimación de la solución avanzada, $Y_{m,n}^p$, y en el segundo semipaso se obtiene la solución avanzada promediando el término no lineal a los valores que toma evaluándolo en Y^t y en Y^p .

Debido al tratamiento implícito que se hace de los términos lineales, todo cálculo lineal será numéricamente estable para cualquier Δt . La única restricción que se tendrá en ese caso será la necesidad de resolver una determinada escala temporal de la dinámica del problema. El problema no lineal, en cambio, sólo es estable para determinados valores del paso temporal. En este caso se tiene que hacer una estimación del valor óptimo de este parámetro, de manera que sea lo suficientemente pequeño como para que el algoritmo sea numéricamente estable, pero por otro lado que sea lo suficientemente grande como para que los tiempos de evolución temporal requeridos no sean computacionalmente inalcanzables.

4.2.3. Condiciones iniciales

En la sección 4.1.3 se mostraban las condiciones de frontera que este problema exige. Ahora estudiaremos las condiciones iniciales necesarias también para poder iniciar el cálculo numérico.

Como condición inicial se perturbará ligeramente cada autofunción. La perturbación se toma gaussiana, con amplitud y anchuras aleatorias y lo suficientemente pequeñas como para que la dinámica posterior no se vea afectada por esos valores y estará centrada en la posición en la que se encuentra la superficie racional asociada a dicho modo, ya que lejos de esa posición, como se vio en la parte lineal, las autofunciones son nulas. Por lo tanto,

$$\tilde{n}_{m,n}^{t=0}(r) = \bar{n}_{m,n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-r_s}{W_{m,n}} \right)^2}, \tag{4.10}$$

siendo $\bar{n}_{m,n}$ y $W_{m,n}$ la amplitud y anchura iniciales de cada modo (m,n) y r_s la posición de la superficie racional.

4.3. Difusividad numérica e hiperviscosidad

A continuación se describirá brevemente el empleo de dos herramientas numéricas que se incluirán con el fin de hacer más estable el método de cálculo. La difusividad numérica afecta a la resolución radial de las autofunciones, mientras que la hiperviscosidad afecta a la resolución espectral, en concreto a modos con número de onda grande.

4.3.1. Difusividad numérica

La difusividad numérica se utiliza para evitar inestabilidades numéricas debidas a la falta de resolución radial, que generan acoplos entre los puntos del mallado [46]. De esta manera, se evita tener que incluir un excesivo número de puntos en la grid y así no ralentizar en exceso el cálculo. Consiste en introducir en la ecuación para las fluctuaciones un término del tipo $\tilde{D}_r \nabla_r^2 \tilde{n}$, por lo tanto, \tilde{D}_r es una difusividad que suaviza las autofunciones. La inclusión de un término de este tipo tiene su base física debido a la colisionalidad de las partículas que conforman el plasma, no obstante, la elección de este parámetro ha de hacerse con mucha precaución ya que un valor excesivo de la difusividad restaría credibilidad a los resultados y lo único que se pretende es conseguir que los autofunciones radiales se resuelvan con una grid sin demasiados nodos pero a la vez sin perder exactitud en los resultados. En la Fig. 4.2 se muestra la autofunción $(m, n) = (33, 22)$ en dos simulaciones con una única helicidad (sólo se incluyen modos que cumplen $m/n = 3/2$). La solución en azul se corresponde al caso sin difusión, mientras que para la solución en rojo se ha introducido una difusión radial de valor $\tilde{D}_r = 10^{-9} a^2 \Omega_i$. Como se puede apreciar, la figura roja es más rugosa, tiene menor resolución radial que la de círculos y esto se ha conseguido con un valor para la difusividad radial relativamente pequeño, que no modificará significativamente los resultados globales de las simulaciones. Esto se comprueba analizando la evolución de la energía, que en ambos casos es similar.

4.3.2. Hiperviscosidad

La hiperviscosidad es otra herramienta necesaria para evitar los efectos de la distorsión del espectro del número de onda radial de las autofunciones asociadas a modos estables, como se vio en la sección 3.3.1. Esta distorsión consiste en la tendencia de los modos estables a ir tomando valores del número de onda radial cada vez más grandes, por lo que los requerimientos acerca de la resolución radial son también cada vez mayores. Ante esto existen dos opciones: o bien se elige un paso radial lo suficientemente pequeño como para poder resolver dichas autofunciones hasta los tiempos requeridos, con el consiguiente coste computacional, o se introduce un sumidero artificial que sólo afecte a modos estables (los que sufren la

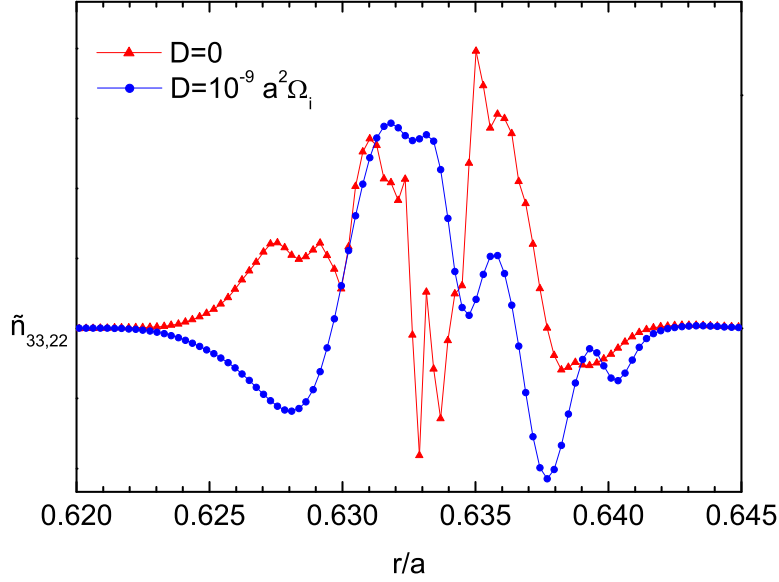


Figura 4.2: Estructura radial de la componente de Fourier $(m, n) = (33, 22)$ durante la fase no lineal en dos simulaciones con una única helicidad. La figura con triángulos se corresponde al caso sin difusión radial mientras que la figura con círculos tiene difusión radial.

distorsión) con una hiperviscosidad. El hecho de introducirla no hace que desaparezca el problema, pero sí lo retrasa considerablemente y tiene la ventaja de que prácticamente no ralentiza el cálculo. Su expresión matemática es $\mu_{\perp} \nabla_{\perp}^4 \tilde{n}$ y en el espacio de Fourier $\mu_{\perp} k_{\perp}^4 \tilde{n}$. Dicho término escala como la cuarta potencia del número de onda, luego afectará en mayor medida a modos con número de onda grande, que en principio son los modos linealmente estables. En la Fig. 4.3 se muestran los espectros de energía para dos casos diferentes. En uno de ellos (puntos rojos) no se incluye hiperviscosidad ($\mu_{\perp} = 0$), mientras que en el otro (puntos abiertos azules) se incluye un término de este tipo ($\mu_{\perp} = 10^{-11} a^4 \Omega_i$). Las autofunciones con m grande no están bien definidas radialmente debido a la distorsión en el espectro del número de onda radial. La inclusión de un término tipo $\mu_{\perp} \nabla_{\perp}^4 \tilde{n}$ hace que la pérdida de resolución no sea tan grande para los modos con $|\mathbf{k}| \gg 1$. Además, puede verse cómo los modos inestables prácticamente no se ven afectados.

Así, el criterio para elegir un valor adecuado de μ_{\perp} se basa en que tenga una influencia apreciable sólo en los modos con número de onda grande (modos estables). En este caso nos aseguraremos de que los resultados no pierden rigor. Al igual que con la difusividad numérica, analizando la evolución de la energía turbulenta en ambos casos se comprueba que la dinámica no queda alterada de forma significativa.

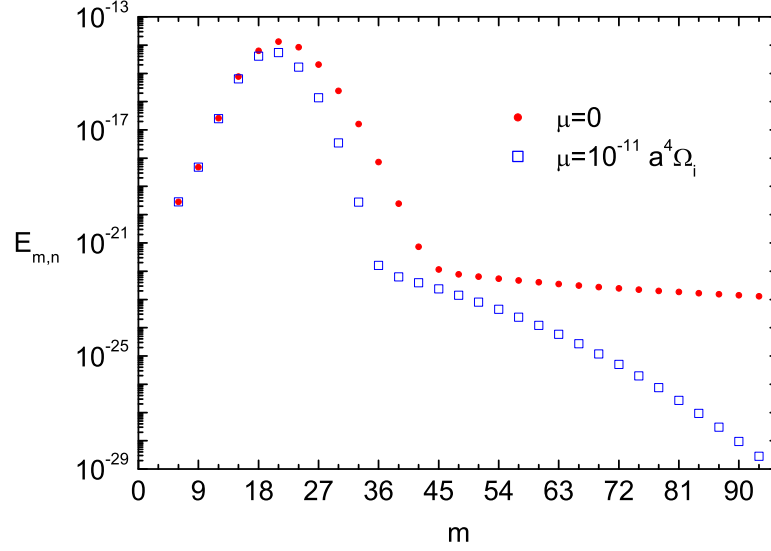


Figura 4.3: Espectros de energía para la helicidad $(m,n)=(3,2)$ durante la fase cuasilineal en dos simulaciones. Los círculos se corresponden a un caso sin hiperviscosidad mientras que para los cuadrados se ha introducido hiperviscosidad.

4.4. Estabilidad y precisión numérica

Haremos uso de la energía fluctuante como diagnóstico principal en la evaluación de la estabilidad y precisión de los resultados numéricos. Además, nos servirá a la hora de hacer una correcta elección de los parámetros numéricos y así optimizar el funcionamiento del algoritmo.

En el apartado 2.2.7 se obtuvo una expresión para la energía de las fluctuaciones y se vio que debía ser una cantidad conservada. A diferencia de la parte lineal, en la que se comparaban resultados analíticos y numéricos, ahora sólo podemos hacer el estudio numérico debido a la presencia del término no lineal. Así, la única forma de establecer acotaciones para los parámetros numéricos será por comparación entre diferentes realizaciones.

Utilizaremos la energía, definida por la Ec. (2.30), como diagnóstico para buscar los parámetros idóneos con los que se realizarán los cálculos.

Hay tres parámetros básicos (además de los citados, difusividad numérica e hiperviscosidad) que influyen decisivamente en la estabilidad y precisión del método de cálculo: el paso temporal, el paso radial y el número de modos involucrados en el cálculo. Para analizar tales influencias, se puede chequear el comportamiento de la energía total de las fluctuaciones frente a variaciones de los parámetros mencionados fijando dos de ellos y haciendo un barrido sobre el tercero. De esta manera se puede estimar el valor al que se puede fijar sin que el cálculo se vuelva inestable y que a la vez sea preciso, sin depender de su magnitud numérica particular. Se hará el estudio con la helicidad de más bajo orden $(m,n) = (3,2)$.

En la Fig. 4.4(a) se representa la evolución de la energía de las fluctuaciones para diferentes valores del paso temporal. En dichas realizaciones se han elegido 40 modos, de manera que el mayor número de onda corresponde al modo $(m, n) = (60, 40)$. La separación entre puntos de la malla radial ha sido de $5.88 \times 10^{-4} a$. Se comprueba que para $\Delta t = 100/\Omega_i$ el método de cálculo es inestable. Además lo es justamente al comenzar la fase no lineal, que es cuando se requiere más resolución temporal para poder resolver los acoplos entre los distintos modos. Para $\Delta t = 75/\Omega_i$ el método también es inestable, aunque más tarde en la evolución. Para los otros tres valores el método de cálculo es estable, siendo el nivel de fluctuaciones en todos los casos parecido. Por lo tanto, el valor límite que podremos utilizar en las simulaciones será $\Delta t \sim 50/\Omega_i$. De aquí en adelante tomaremos $\Delta t = 50/\Omega_i$ para el paso temporal.

Hay que reseñar que estos valores son mucho más restrictivos que los correspondientes al problema lineal. En aquel caso la escala temporal asociada a la evolución dinámica se podía deducir a partir de la frecuencia de oscilación de la onda o de su tasa de crecimiento, de forma que $\Delta t \sim 1/(\omega_r^2 + \gamma^2)^{1/2} \sim 1000/\Omega_i$. En los casos en los que exista un flujo de equilibrio, V_0 , las restricciones serán mayores debido a la necesidad de tener que resolver la frecuencia de desplazamiento Doppler, $k_\theta V_0$. En cálculos no-lineales, los fenómenos con dinámicas más rápidas no pueden ser descritos por escalas temporales lineales del orden de ω_{*e}^{-1} . Ahora las escalas temporales están asociadas a la convección de los eddies más pequeños que como se comprueba, son aproximadamente 50 veces mayores.

Un segundo test consiste en analizar la estabilidad y precisión frente a variaciones del paso radial. Elegimos $\Delta t = 50/\Omega_i$ y nuevamente se introducen 40 modos en todas las realizaciones. En la Fig. 4.4(b) se representa la energía. Para $\Delta r = 1.18 \times 10^{-3} a$ el esquema es inestable, pero para todos los demás valores la energía toma valores análogos. En adelante, se tomará $\Delta r = 5.88 \times 10^{-4} a$ como valor estándar del paso radial.

El último test consiste en evaluar la evolución de la energía variando el número de modos de Fourier. Como era de esperar, cuando el número de modos involucrado es muy pequeño, el método se hace inestable debido a la falta de resolución en las variables angulares, que son tratadas espectralmente. De la misma manera que al disminuir el número de puntos en la malla radial se pierde resolución radial, al disminuir el número de modos disminuye la resolución angular. En la Fig. 4.4(c) se muestran los resultados. En el caso límite en el que sólo hay 20 modos, además de tener poca resolución angular, no existen modos linealmente estables, por lo que el algoritmo diverge. De 30 modos en adelante el método es estable ya que empiezan a existir modos disipativos y se obtienen resultados similares. En adelante, y para casos con múltiple helicidad, se tomarán tantos modos como sean necesarios para que el número de onda toroidal de cada helicidad no sobrepase el valor máximo $n_{\text{máx}} = 42$, que es el equivalente a introducir 43 modos para la helicidad $3/2$.

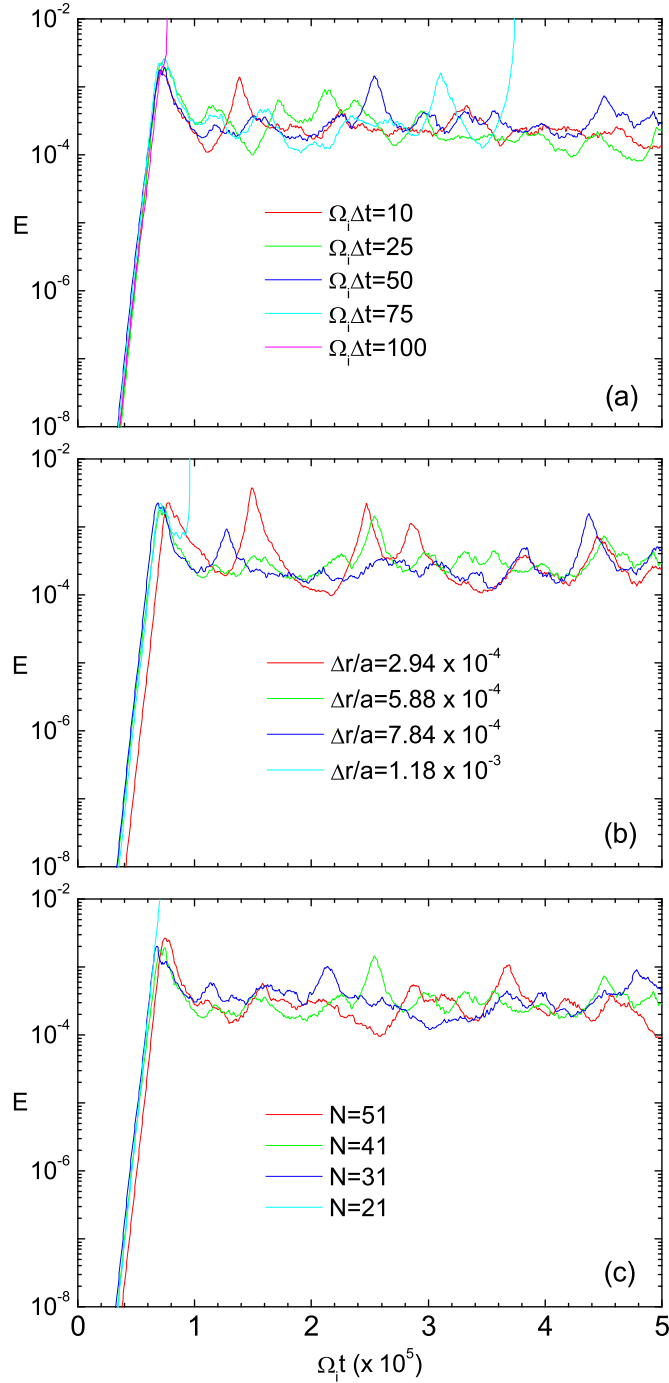


Figura 4.4: (a) Energía fluctuante para diferentes valores del paso temporal. (b) Energía fluctuante para diferentes valores del paso radial. (c) Energía fluctuante para diferente número de armónicos de Fourier.

Capítulo 5

Interacción entre los canales de transporte turbulento y difusivo

Como ya se vio en el capítulo 1, el objetivo final hacia el que van encaminados los estudios en las disciplinas de la física del plasma y más en general de la fusión nuclear, es el de obtener energía de manera eficiente: la energía liberada en las reacciones de fusión debe ser mayor que la que se necesita para iniciar el proceso y mantenerlo posteriormente. Por lo tanto, es necesario comprender las causas que provocan el deterioro en el confinamiento de las partículas y la energía.

Básicamente, existen dos mecanismos que generan transporte de partículas y de calor en un plasma: la difusión y la turbulencia. Ambos actúan cuando un sistema está fuera del equilibrio termodinámico y un plasma de fusión lo está. En él, las diferentes cantidades termodinámicas (temperatura, densidad, presión, etc) presentan fuertes gradientes y éstos son los que activan ambos canales de transporte.

El canal difusivo genera el llamado transporte clásico y se calcula teniendo en cuenta las colisiones culombianas que sufren los iones que componen el plasma. Así, la citada contribución nos dará un mínimo en la estimación del transporte. Si además tenemos en cuenta la geometría toroidal de los dispositivos de confinamiento magnético y los efectos que se derivan de ella, entonces el canal difusivo dará cuenta del llamado transporte neoclásico, donde ahora la longitud característica del proceso será la asociada a la anchura típica de las trayectorias banana que lo generan.

El canal de transporte turbulento actúa cuando el sistema entra en un régimen que es capaz de excitar modos normales en determinados lugares: concretamente, en un plasma esto sucede en las inmediaciones de las superficies racionales. Dichos modos se excitan alimentados por la energía libre que acumula el plasma en forma de gradientes, ya sean de densidad, temperatura, presión, corriente, etc. Así, existe una extensa variedad de posibles inestabilidades que se pueden dar en un plasma de fusión.

Existe evidencia de que cuando los perfiles están cerca de los valores que los hacen críticos frente a determinadas inestabilidades, el transporte presenta características fuertemente no-difusivas que presentan similitudes con lo que se observa en los puntos críticos, sobre todo efectos de memoria y correlaciones divergentes. Esto hace que las propiedades de transporte sean muy diferentes, lo que puede impactar las predicciones de confinamiento de partículas y energía en estos plasmas. Sin embargo, recientemente se ha avanzado la idea de que debido a la coexistencia del canal turbulento con el canal colisional neoclásico, la naturaleza no difusiva y no Markoviana asociada a la cercanía a umbrales críticos de inestabilidad queda modificada. En concreto, la naturaleza del transporte volvería a ser de tipo difusivo. En este capítulo se estudia si la presencia de una difusión subdominante, que siempre está presente en cualquier plasma, cambia esta situación o no [47].

Así, se estudiarán los cambios en el transporte generado por modos DTEM en función de la intensidad relativa de los canales difusivo (de baja intensidad) y turbulento (dominante). Para ello, se harán diferentes realizaciones en las que se variarán sus pesos relativos y se establecerán los efectos producidos en las propiedades estadísticas de la actividad turbulenta, que definiremos más adelante.

5.1. Turbulencia GD y FD

Como acabamos de decir en la introducción de este capítulo, las fuentes de inestabilidad en sistemas turbulentos son los gradientes. Concretamente, este tipo de turbulencia (DTEM) aparece cuando los gradientes de densidad y/o temperatura de equilibrio¹, exceden un cierto valor crítico. Analizando el coeficiente del término fuente,

$$D_\theta = \frac{1.5\sqrt{\varepsilon} (c_s \rho_s)^2}{L_T L_n \nu_{\text{eff}}}, \quad (5.1)$$

se concluye que la fuente de energía libre o drive es proporcional al factor

$$\frac{1}{L_T L_n} = \frac{1}{T_0} \left| \frac{dT_0}{dr} \right| \frac{1}{n_0} \left| \frac{dn_0}{dr} \right|. \quad (5.2)$$

En el momento en que existan modos inestables se generará turbulencia y aparecerán vórtices dispuestos en las inmediaciones de las superficies racionales. Dichos vórtices tratarán de relajar los perfiles (gradientes) generando flujos de partículas hacia superficies vecinas. Si no existe ninguna fuente de partículas que mantenga los gradientes por encima de los valores críticos, los vórtices (turbulencia) desaparecerán. En caso contrario, se llegará a un estado estacionario en el que toda la potencia que se introduce en el sistema por la fuente será disipada localmente o

¹En realidad es una combinación de ambos.

transportada radialmente por los vórtices, mecanismo conocido como transporte turbulento.

Existe una clasificación en cuanto a la implementación numérica que se puede realizar de los sistemas turbulentos. El criterio se basa en la forma en que la fuente externa es introducida en el sistema. Según esto, tenemos los sistemas GD (Gradient Driven), los MGD (Modified Gradient Driven) y los FD (Flux Driven).

Originalmente, la aproximación utilizada en estudios de turbulencia fue la GD. Se caracteriza porque la fuente es constante. Para ello, se obliga al sistema a ser supercrítico manteniendo fijos los perfiles, ignorándose el efecto de la turbulencia sobre ellos. La mayor parte de los estudios de transporte turbulento se han hecho en base a esta aproximación, ya que permite obtener expresiones para los coeficientes de transporte en función de los gradientes de forma sencilla: basta mantener fijos los perfiles de equilibrio. Además, dado que el mecanismo de saturación es la interacción no lineal, se asegura que el régimen estacionario se debe únicamente a la cascada de energía hacia modos disipativos. Bajo esta aproximación, implícitamente se hace una separación entre las escalas temporales asociadas a las fluctuaciones y a los perfiles. Manteniendo fijos los perfiles se asume que las escalas temporales típicas del transporte son mucho mayores que las de las fluctuaciones.

La aproximación MGD, es una versión modificada de la GD y menos restrictiva. Se construye fijando el valor de los perfiles únicamente en los extremos, pudiendo evolucionar libremente en el interior. Así, aunque en promedio siguen siendo constantes, son libres de evolucionar en torno a ese promedio. En este caso la fuente ya no es constante puesto que depende del valor local que toman los gradientes en cada punto. Con este tratamiento, aparecen fenómenos de transporte colectivo tales como avalanchas, que no podían existir, por definición, en el caso GD. En turbulencia MGD es necesaria la inclusión de una fuente externa que compense las pérdidas, ya que debido a la relajación local de los perfiles, globalmente se transporta materia y energía hacia el exterior. La fuente viene dada por un flujo externo de partículas y/o calor que se introduce perturbando los perfiles (en general, de forma aleatoria tanto espacial como temporalmente). De esta manera se compensan los efectos de aplanamiento que hacen que la turbulencia desaparezca. El mecanismo básico de saturación en este caso es la relajación del perfil, que complementa a la cascada de energía. En los estudios que se hagan de aquí en adelante utilizaremos la aproximación MGD.

Finalmente, la aproximación FD es la más realista, ya que deja evolucionar libremente los perfiles (que es lo que realmente sucede en los procesos turbulentos en plasmas de fusión), manteniendo fijo el gradiente en los extremos. En geometría cilíndrica esto último implica mantener a cero el gradiente en el eje dada la simetría axial del problema. Como en el caso MGD, es necesaria la inclusión de una fuente externa, con más motivo en este caso, puesto que el perfil en el interior se va aplanando, cosa que no sucede bajo la aproximación MGD.

Bajo las aproximaciones MGD y FD no se supone, a priori, separación alguna entre las escalas temporales asociadas a fluctuaciones y perfiles, puesto que evolucionan acoplados. Esto no quiere decir que los tiempos típicos de fluctuaciones y transporte tengan que dejar de ser muy diferentes con estas implementaciones. Se esperan dinámicas temporales muy diferentes, pero no se imponen desde un principio.

5.2. Mecanismo de desestabilización turbulento

Al evolucionar el perfil de densidad promedio junto con las fluctuaciones [Ecs. (2.26) y (2.35)], se genera un ciclo dinámico que comienza cuando determinados modos son desestabilizados debido al rebasamiento local del umbral de estabilidad lineal. Para modos DTEM, la condición es $L_n L_T < L_n L_T^c$ (que el producto de las longitudes asociadas a los perfiles de densidad y temperatura sea menor que el crítico). Si se cumple esta condición, los modos inestables crecen linealmente hasta acumular la suficiente energía como para generar turbulencia e interaccionar entre ellos constituyendo la fase no-lineal o saturada. Así, los que sean más inestables irán cediendo parte de su energía a los estables hasta alcanzar un equilibrio dinámico en el que la energía que aporta la fuente a los primeros se irá disipando en los segundos, todo ello ayudado por el flujo de energía (cascada de energía) que genera la fase no-lineal.

Existe además otro mecanismo que hace que el exceso de energía se acomode en el sistema: la interacción de los modos inestables con el perfil (modo $m, n = 0, 0$). Éste se relaja por intercambio de energía con los primeros haciendo menores los gradientes (Fig. 5.1), hasta que se hace subcrítico. Así, los modos se estabilizan y la turbulencia desaparece al no existir drive. En el momento en que exista otro lugar en el que el perfil se haga crítico, el ciclo se repetirá de nuevo.

5.2.1. Superficies racionales y transporte por avalanchas

Ya se mencionó que en los plasmas de fusión se genera turbulencia en las zonas en las que se encuentran dispuestas las superficies racionales debido a que en ellas el efecto del término disipativo en la ecuación para las fluctuaciones se anula ($k_{||} = 0$).

En la Fig. 5.2 se muestra la distribución radial de las superficies racionales, así como los diferentes modos involucrados en los cálculos con helicidad múltiple. En total se han incluido 190 componentes de Fourier (191 si consideramos el $m, n = 0, 0$). El número de modos es pequeño en comparación con los que se necesitan para resolver correctamente el mismo problema manteniendo fijo el perfil de densidad. Esto es debido a que en nuestro caso el principal mecanismo de disipación de la energía es la relajación del perfil de densidad y no la cascada directa de energía. ¿Cómo se puede describir el proceso de transporte turbulento de una

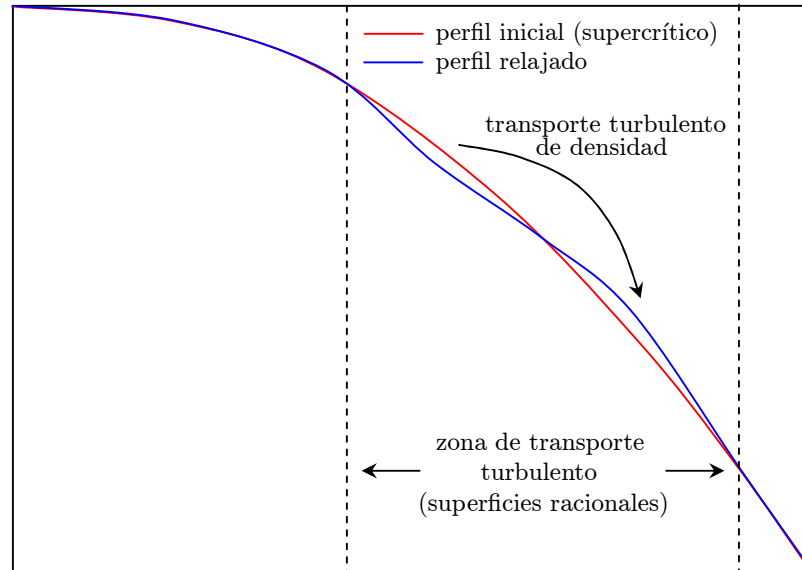


Figura 5.1: Esquema del proceso de aplanamiento del perfil de densidad debido a la excitación de modos inestables.

forma intuitiva? Acabamos de ver que se genera turbulencia cuando los gradientes exceden un determinado umbral. Supongamos que en una zona dicho umbral se supera. Entonces aparecen modos inestables que crecen linealmente hasta llegar a la fase no lineal donde interaccionan con los demás y con el perfil. Este último reacciona disminuyendo localmente su pendiente para estabilizar a los modos inestables. Debido al aplanamiento local, las zonas adyacentes aumentan la pendiente (ver Fig. 5.1), generándose nuevamente inestabilidad de forma que el ciclo vuelve a repetirse, pero ahora en zonas desplazadas respecto de la inestabilidad inicial. Este proceso tiene las características de una avalancha según la dirección radial y se propaga en ambas direcciones. No existe limitación alguna en la magnitud de cada una de ellas, salvo la impuesta por el tamaño del sistema (en este caso por el tamaño de la porción radial en que están dispuestas las superficies racionales).

5.3. Criticalidad Auto-Organizada

El concepto de Criticalidad Auto-Organizada (SOC) [48] surge como una posible explicación del porqué de la existencia de multitud de fenómenos que presentan autosimilaridad en la naturaleza.

Un sistema exhibe Criticalidad Auto-Organizada cuando es mantenido fuera del equilibrio por una fuente externa y adquiere un estado estacionario que presenta propiedades de autosimilaridad análogas a las de un punto crítico. Una característica de estos sistemas es que llegan al punto crítico sin la necesidad de

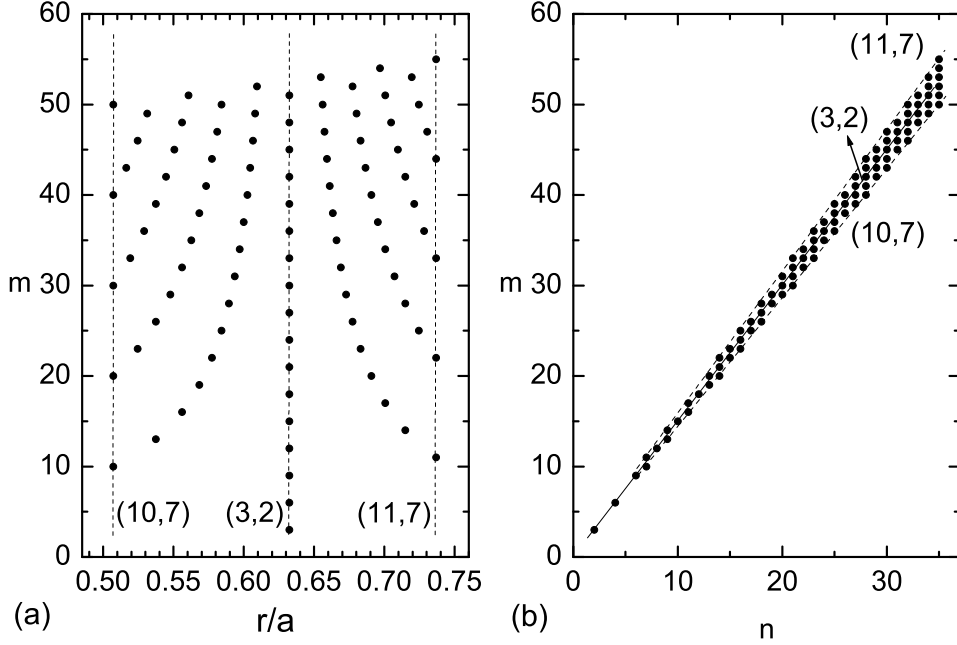


Figura 5.2: (a) Distribución radial de las superficies racionales y (b) diagrama $m - n$. En ambos casos se resaltan las tres helicidades principales incluidas en el cálculo.

intonizar ningún parámetro de control, a diferencia de lo que ocurre en los puntos críticos propios de las transiciones de fase en sistemas termodinámicos.

5.3.1. Autosimilaridad

De forma intuitiva, un sistema es autosimilar si magnificando una parte se recupera el sistema completo.

Desde el punto de vista espacial, los objetos con tales características se denominan fractales [49] y se caracterizan por tener dimensión topológica menor que su dimensión fractal. Existen múltiples ejemplos en los que la naturaleza presenta estructuras espaciales fractales: paisajes montañosos, líneas de costa, formas de ríos, patrones de fracturas, frentes de propagación de fuego, etc.

Desde el punto de vista temporal, los sistemas que generan señales autosimilares carecen de escalas temporales características. También es usual su presencia en la naturaleza: luminosidad de las estrellas, crecidas del Nilo, tiempos de espera de terremotos, etc. La manera de evidenciar este hecho es buscando leyes de potencia en sus espectros de potencia. Las leyes de potencia permanecen invariantes bajo cambios de escala por lo que en tales sistemas no pueden existir escalas naturales, todas las escalas participan en la dinámica. En los espectros de estas señales siempre se encuentra una región con un decaimiento que escala como $1/f^\alpha$, donde α

puede tomar valores en el intervalo $[0, 1]$.

5.3.2. Criticalidad Auto-Organizada y transporte por avalanchas

En la sección 5.2.1 se describe de manera cualitativa el mecanismo por el que se puede generar transporte tipo avalancha en un sistema turbulento cercano a sus umbrales locales de inestabilidad, como es el caso de un plasma confinado magnéticamente. Dicho esquema se entiende de manera natural dentro del marco de la Criticalidad Auto-Organizada, puesto que estamos ante un sistema que no tiene escalas de transporte características, exhibiendo por tanto autosimilaridad espacial (dentro de los límites máximo y mínimo impuestos por los tamaños del sistema y de los eddies respectivamente) y temporal (también dentro de los límites máximo y mínimo representados ahora por el tiempo de vida total del proceso y por el tiempo asociado a la vida media de los eddies). Las propiedades de confinamiento de un sistema SOC son muy distintas a las de un sistema puramente difusivo.

5.4. Procesos de transporte a favor de la hipótesis SOC

Hay una serie de fenómenos que se encuentran experimentalmente en las máquinas de fusión y que a priori podrían ser clasificados como “extraños” desde el punto de vista difusivo [50–53]. Sin embargo, tienen las características de los sistemas SOC descritos anteriormente:

1. **Consistencia de perfiles:** En muchos experimentos se encuentra que los perfiles (de presión, temperatura o densidad) son bastante insensibles a la potencia inyectada (en modo L^2) y a la posición en la que se inyecta. Esto evidencia la existencia de umbrales críticos de inestabilidad que al ser superados desencadenan avalanchas y por tanto transporte. Se encuentra también que en promedio los perfiles son estables, a pesar del transporte observado, lo que sugiere que los perfiles permanecen en un estado cercano al crítico. La analogía con los sistemas SOC es clara puesto que en esos casos el sistema trata de relajar los perfiles mediante avalanchas de cualquier tamaño.
2. **Escalado del tiempo de confinamiento con el radio del dispositivo en modo L:** Se observa que en modo L el tiempo de confinamiento de la energía escala con el radio de la máquina (escalado tipo Bohm). Sin embargo, la longitud de correlación de las fluctuaciones es del orden de unos pocos

²Del inglés, Low confinement mode.

radios de Larmor. Esto implica la no existencia de escalas características, típico de fenómenos SOC. Además, sugiere algún tipo de relación o interacción entre las escalas espaciales asociadas a las fluctuaciones y al transporte respectivamente en modo L.

3. **Efecto del shear flow:** Los flujos poloidales de equilibrio con shear (shear flow) decorrelacionan las avalanchas y mejoran el confinamiento, cambiando el escalado del tiempo de confinamiento de la energía en modos de confinamiento mejorado (escalado gyro-Bohm³).
4. **Fenómenos con velocidad de propagación muy alta:** En transiciones L-H⁴, que requiere la modificación rápida del coeficiente de transporte en una zona extensa. También la propagación hacia el interior de pulsos fríos. Se observa en estos casos propagación balística, no difusiva.
5. **Decaimiento $1/f^\alpha$ del espectro de la turbulencia:** El espectro de la turbulencia tiene una dependencia con la frecuencia bastante insensible a cambios en parámetros globales y para máquinas muy distintas. Siempre se encuentra una zona de decaimiento que escala como $1/f^\alpha$ a bajas frecuencias.

Debido a estos hechos experimentales, el paradigma SOC se postula como una posible vía para el entendimiento de los fenómenos de transporte en plasmas de fusión [50, 51, 54].

5.5. Un sistema SOC sencillo: El montón de arena

Para un mejor entendimiento de los principios que rigen la dinámica de sistemas que exhiben Criticalidad Auto-Organizada se suele recurrir al montón de arena⁵ [55, 56], dada la clara analogía entre el proceso de transporte de arena en el sandpile y el de plasma en los dispositivos de fusión, como se puede ver en la tabla 5.1.

La implementación del sandpile en forma de autómata celular es sencilla ya que así lo es el algoritmo que lo rige. En esencia, el algoritmo lleva el recuento de los valores asociados a cada punto (célula) de un mallado y lo evoluciona en cada paso incrementándolo, disminuyéndolo o dejándolo igual en base a una función de transición que toma como argumento el valor de la célula en cuestión y el de sus vecinos, regresando el valor que tendrá en el siguiente paso.

³A diferencia del escalado Bohm, en el gyro-Bohm el tiempo de confinamiento escala con la longitud de decorrelación de las fluctuaciones.

⁴Transiciones del modo L (Low confinement mode) al modo H (High confinement mode).

⁵De aquí en adelante utilizaremos el término inglés *sandpile* para referirnos al montón de arena.

| Sandpile | Plasma |
|--------------------------|---------------------------------------|
| Dominio del sandpile | Extensión radial del dispositivo |
| Celda | Estructura coherente (eddy) |
| Arena | Partículas, energía |
| Lluvia de arena | Fuentes |
| Pendiente crítica | Umbral local de inestabilidad |
| Reducción local de arena | Relajación local de la turbulencia |
| Avalancha | Suceso extendido de transporte radial |

Tabla 5.1: Analogía entre el sandpile y un plasma confinado magnéticamente.

Inicialmente todas las células están vacías y se va añadiendo arena de forma aleatoria a cada una de ellas con una cierta probabilidad. Cuando la pendiente entre celdas contiguas exceda un cierto umbral se produce el volcado de arena para relajar el perfil. Si las celdas receptoras de esa arena sobrante se vuelvan nuevamente inestables, el proceso se repite, dándole el carácter propagante e iniciándose una avalancha.

Todo esto sucede una vez que se ha llegado a un estado estacionario de no equilibrio en el que la pendiente adquiere su valor crítico. Para llegar a tal estado es necesario que exista un sumidero por el que se evacua una cantidad de arena (a través del borde del sistema) igual, en promedio, a la que es introducida por la fuente. En este estado el sistema exhibe las propiedades de los sistemas SOC.

Para evaluar dichas propiedades se utilizan diferentes diagnósticos como el recuento de las células que son inestables en cada paso temporal (actividad de transporte por avalanchas). También se pueden calcular las PDFs⁶ de los tamaños o duraciones de las avalanchas. En todos los casos se observan leyes de potencia implicando que el sistema se ha Auto-Organizado hacia un estado crítico, en el que no existen escalas espaciales o temporales características.

El hecho de que se den leyes de potencia (proporcionalidades tipo $1/f^\alpha$) tiene su interpretación cuantitativa. Por ejemplo, en el caso $\alpha = 1$, si pudiéramos contar durante un periodo de tiempo el número de avalanchas y clasificarlas por su tamaño (o duración) encontraríamos que, en promedio, se daría 1 avalancha de tamaño 10^5 , 10 de tamaño 10^4 , 10^2 de tamaño 10^3 , 10^3 de tamaño 10^2 , etc. Lo mismo sucede para las duraciones. Además, dicha autosimilaridad debiera exhibirse para todos los tamaños y todos los tiempos, pero como ya se mencionó, esto sólo sucede dentro de los límites impuestos por el tamaño total del sistema y su tiempo de vida.

En este modelo particular hemos visto que las leyes físicas particulares que dictan la interacción entre componentes individuales no tienen relevancia sobre las propiedades del sistema una vez que se ha Auto-Organizado hacia el estado Crítico. Más aún, para cualquiera de los sistemas que presentan esta dinámica se

⁶Del inglés, Probability Distribution Function.

comprueba que las leyes específicas que los definen no interfieren en manera alguna en la generación de leyes de potencia. El marco de ideas SOC intenta explicar el porqué de las relaciones con leyes de potencia observadas en multitud de sistemas tan dispares.

El papel que juega en la dinámica del transporte la interacción entre avalanchas y difusión normal ya ha sido explorado en el sandpile [57, 58]. Se observa que la dinámica SOC persiste en presencia de difusión, siempre y cuando el canal turbulento (generador de las avalanchas) sea dominante frente al difusivo. En caso contrario el transporte se vuelve completamente difusivo y se pierden las propiedades de autosimilaridad (las avalanchas dejan de existir). Estudios similares en simulaciones de turbulencia FD de intercambio e ITG [59, 60] en los que se introducía una difusividad neoclásica, obtenían perfiles de temperatura supercríticos en promedio, lo que aparentemente está en contradicción con los resultados obtenidos por autómatas celulares. En realidad, el hecho de que los perfiles sean en promedio supercríticos no tiene por qué ser indicio de una dinámica alejada del comportamiento SOC. Los estudios preliminares con autómatas celulares se hacían en el límite $\tilde{S} \rightarrow 0^+$ (límite de forzado nulo), ya que se suponía que ese ingrediente debía ser básico a la hora de encontrar comportamiento SOC al asegurar la subcriticalidad de los perfiles promedio. Sin embargo, resultados posteriores de estudios de la dinámica del sandpile en los que el ritmo de forzado iba aumentando, alejándose por tanto del requisito anterior [61], mostraron que las correlaciones dinámicas observadas en el límite de forzado nulo aun persistían.

En este trabajo se confirmará, con el modelo de turbulencia DTEM, que a pesar de la existencia de perfiles supercríticos en promedio (lo que se consigue con altos ritmos de forzado o difusividades finitas), el sistema sigue mostrando las correlaciones dinámicas, persistencia y memoria características de los sistemas SOC.

5.6. Ecuaciones del modelo DTEM completo

A continuación, discutimos brevemente las dos ecuaciones de nuestro modelo a la luz del marco de la Criticalidad Auto-Organizada. En primer lugar, hablaremos brevemente de la ecuación para las fluctuaciones de densidad. Esta ecuación es la encargada de relajar localmente el perfil de densidad cuando se superan los umbrales de inestabilidad. Juega el papel análogo al de las reglas de volcado de arena en el proceso de relajación del sandpile cuando se excede la pendiente crítica. La segunda ecuación, que da cuenta de la evolución del perfil de densidad, guarda analogía con la evolución del perfil de arena en el sandpile.

5.6.1. Ecuación para las fluctuaciones

La ecuación final del modelo para las fluctuaciones es análoga a la que se vio en la sección 2.2.6 [Ec. (2.26)],

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{n}}{dt} - \rho_s^2 \frac{d\nabla_\perp^2 \tilde{n}}{dt} + V_{*n} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \theta} + D_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial \theta^2} - \frac{c_s^2}{\nu_i} \nabla_\parallel^2 \tilde{n} \\ - D_r \nabla_r^2 \tilde{n} - \mu_\perp \nabla_\perp^4 \tilde{n} \\ - L_n D_\theta \left[\nabla_\perp \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_\perp \tilde{n} \\ + c_s \rho_s [\nabla_\perp \tilde{n} \times \hat{z}] \cdot \nabla_\perp (\rho_s^2 \nabla_\perp^2 \tilde{n}) = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

con la incorporación de los dos términos de la segunda línea (difusión e hiperviscosidad) que darán estabilidad al esquema.

En esa sección se vio que la razón entre las dos no linealidades del modelo venía dada por,

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\text{polarización}} \sim \frac{L_n D_\theta}{c_s \rho_s^3 k_\theta}. \quad (5.4)$$

Ahora que ya sabemos lo que vale cada término, obtenemos para el cociente un valor de $5 \times 10^3/m$. Dado que el máximo de los números de onda poloidal es $m = 55$, en el peor de los casos la razón sigue siendo mucho mayor que la unidad y la no linealidad por deriva de polarización puede ser descartada en los cálculos.

5.6.2. Ecuación para el perfil

La ecuación de evolución de la densidad promedio fue hallada en el capítulo 2,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle n \rangle - n_0 - \rho_s^2 \nabla_r^2 \langle n \rangle) = \tilde{S}(r, t) + \nabla_r [D_{\text{ext}}(r) \nabla_r (\langle n \rangle - n_0)] \\ + \left\langle L_n D_{\text{eff}} \left[\nabla_\perp \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_\perp \hat{n} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

En esta ecuación, la interacción entre las fluctuaciones y el perfil se efectúa a través del último término. Por otro lado, cualquier cambio en el perfil se transmite sobre las fluctuaciones a través de la longitud típica del perfil, $L_n(r)$ en la Ec. (5.3). La interacción entre los canales de transporte difusivo y turbulento se efectúa a través de los términos penúltimo y último.

5.7. Canal de transporte difusivo

Para verificar la robustez del concepto SOC en presencia de difusión, nuestro modelo de transporte incluye un término difusivo que va incluido en la ecuación de

evolución del perfil [Ec. (5.5)]. Así, se puede estudiar la dependencia de las propiedades estadísticas del transporte frente a variaciones de la intensidad relativa entre los canales difusivo y turbulento.

Como acabamos de ver en la Ec. (5.5), el coeficiente del término difusivo es $D_{\text{ext}}(r)$, que también aparece en la ecuación del equilibrio, Ec. (5.6). Su valor numérico ha de elegirse cuidadosamente ya que fuera de las superficies racionales el transporte es puramente difusivo. Por tanto, en tales zonas será este canal el responsable de mantener el perfil de densidad de forma que no se produzcan acumulaciones ni pérdidas.

Para comenzar cualquier simulación partimos de un perfil de equilibrio (n_0) que es inestable frente a modos DTEM. La parte no fluctuante del término fuente (S_0) será idénticamente cancelada por la difusión radial, de manera que,

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = S_0(r) + \nabla_r [D_{\text{ext}}(r) \nabla_r n_0] = S_0(r) - \nabla_r \Gamma_{\text{diff}}. \quad (5.6)$$

En el estado estacionario se tiene que cumplir,

$$0 = S_0(r) - \nabla_r \Gamma_{\text{diff}} \implies S_0(r) = \nabla_r \Gamma_{\text{diff}}, \quad (5.7)$$

donde el flujo de partículas difusivo viene dado por la Ley de Fick,

$$\Gamma_{\text{diff}} = -D_{\text{ext}}(r) \nabla_r n_0. \quad (5.8)$$

Este balance entre fuente y difusión mantiene el perfil de equilibrio.

Considerando ambos canales, el flujo de partículas total será la suma de dos componentes, $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_{\text{diff}} + \Gamma_{\text{tur}}$, donde ahora el flujo turbulento viene dado por la interacción no-lineal de los modos DTEM.

La elección del coeficiente de difusión $D_{\text{ext}}(r)$ ha de hacerse con cuidado ya que fuera del intervalo en el que se sitúan las superficies racionales el transporte es puramente difusivo y debe equilibrar la parte de la fuente externa fluctuante \tilde{S} , caso de que ésta exista. En este caso, aunque en la zona interior no exista difusividad, en la zona exterior deberá haberla para que no se produzca acumulación en la zona de transición.

Por tanto, el valor numérico de la difusividad sobre el perfil variará en función de la zona radial sobre la que actúe de acuerdo a la siguiente expresión,

$$D_{\text{ext}}(r) = \begin{cases} D_{\text{in}} & r \in [0, r_{\text{in}}] \\ D_0 & r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}] \\ D_{\text{ex}} & r \in [r_{\text{ex}}, 1] \end{cases} \quad (5.9)$$

Es importante una correcta elección de los valores de D_{in} y D_{ex} si se quieren obtener unas condiciones de frontera adecuadas en las simulaciones. En particular, un valor correcto para D_{in} podría ser cero si en esa zona del plasma no hay fuente

externa, pero en ese caso en la zona de transición r_{in} se produciría un hueco que iría creciendo a medida que el sistema evoluciona, debido a la ausencia de flujo en dicho punto. Por otro lado, si el valor de D_{in} es no nulo, introducimos un flujo difusivo que afectará a las propiedades del transporte en la zona $r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$.

D_0 es el valor numérico que toma el canal difusivo en la zona central (zona de las superficies racionales) y que por lo tanto interaccionará con el canal turbulento.

Finalmente, tendremos que elegir un valor adecuado para D_{ex} . En este caso el canal difusivo tiene que ser capaz de remover todas las partículas que llegan de r_{ex} de forma que no se produzcan acumulaciones ni huecos en esa posición. Si no se consigue esto, los cambios en la dinámica global del transporte no tendrían mucho que ver con la interacción difusivo-turbulenta dentro de $[r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$. La Ec.

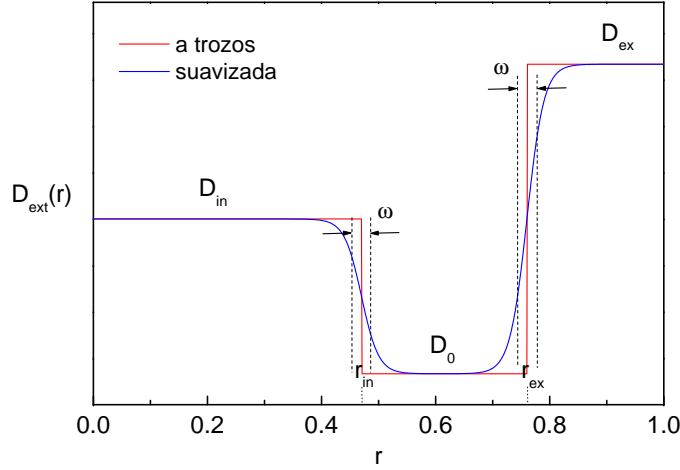


Figura 5.3: La línea roja representa la distribución radial del coeficiente de difusión definido a trozos. En azul se muestra el mismo coeficiente definido con ayuda de tangentes hiperbólicas. (Los valores numéricos en la gráfica no están a escala con los utilizados en las simulaciones).

(5.9) representa una función con poco sentido físico debido a lo abrupto de sus cambios en las zonas de transición al estar definida a trozos. Una elección más acertada es,

$$D_{\text{ext}}(r) = D_0 + \frac{(D_{\text{in}} - D_0)}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{r - r_{\text{in}}}{\omega} \right) \right] + \frac{(D_{\text{ex}} - D_0)}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{r - r_{\text{ex}}}{\omega} \right) \right], \quad (5.10)$$

siendo ω la anchura de las zonas de transición. Esta última definición para D_{ext} es la que se ha utilizado en los cálculos. En la Fig. 5.3 se muestran ambas funciones.

Valores numéricos típicos utilizados en las simulaciones fueron $D_{\text{in}} = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, $D_0 \in [0, 10^{-7}] \text{ a}^2 \Omega_i$ y $D_{\text{ex}} = 3 \times 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$.

5.8. Determinación numérica del umbral de inestabilidad

El umbral de inestabilidad turbulento no lineal se puede calcular de forma sencilla teniendo en cuenta que el perfil de temperatura no evoluciona⁷. En ese caso, la inestabilidad frente a modos DTEM puede representarse en función de un único parámetro, $L_{n_{nl}}^c$. Su valor difiere del obtenido mediante un análisis lineal, $L_{n_l}^c$, ya que en este caso cada modo se considera de forma individual, sin interactuar con el resto, teniendo que disipar sólo él toda la energía acumulada. En el caso no lineal, parte de la energía se redistribuye hacia otros modos aumentando la eficiencia del proceso. Así, el valor del umbral de inestabilidad no lineal será menos restrictivo que el lineal, $L_{n_l}^c(r) > L_{n_{nl}}^c(r)$. El umbral no lineal es el relevante cuando se trata de estudiar efectos de memoria que se almacenan en el perfil de densidad. Esta cuestión es de gran importancia puesto que tradicionalmente se ha asociado el estado SOC con perfiles promedios linealmente subcríticos, cosa que no tiene por qué suceder cuando estamos en la fase no lineal. En la Fig. 5.4 se muestra una clasificación esquemática de los perfiles en cuanto a su estabilidad.

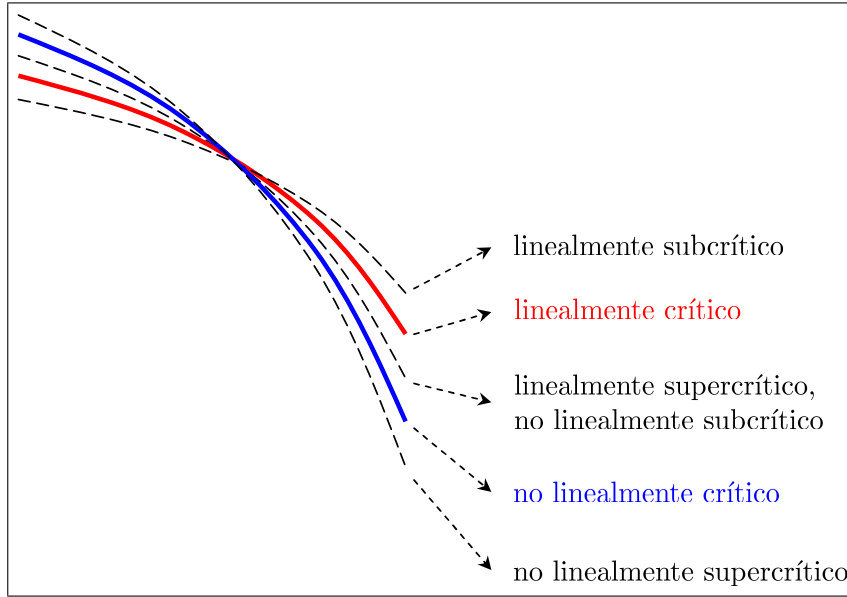


Figura 5.4: Esquema de los diferentes regímenes en los que puede permanecer el perfil de densidad en función de su inestabilidad global.

Para calcular numéricamente el umbral de inestabilidad turbulento $L_{n_{nl}}^c$, pondremos a cero el canal difusivo, $D_{\text{ext}}(r) = 0$. Así nos aseguramos de que el único mecanismo de transporte posible es el turbulento. Además, de acuerdo con lo que

⁷En un plasma real sí evoluciona, pero el modelo que estudiamos lo mantiene congelado.

se discutió en la sección 5.7, para que exista una solución estacionaria de equilibrio sin difusión no puede haber fuente alguna $S_0(r) = 0$. De lo contrario, en la zona de transición se produciría acumulación de densidad. Elegimos como perfil inicial uno de tipo parabólico, $n_0(r) = 1 - r^2$ y le añadimos pequeñas perturbaciones a los diferentes modos de Fourier que actuarán de semilla para desencadenar las inestabilidades. Estas perturbaciones iniciales tienen que ser lo suficientemente pequeñas como para asegurar un nivel de saturación independiente de ellas y una estabilización debida a la redistribución de la densidad en el intervalo $r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$. Después el sistema evolucionará habiendo adquirido un perfil de densidad estable a lo largo de toda su distribución radial [$L_n(r) > L_{n_{\text{nl}}}^c(r) \forall r$]. Esto se comprueba analizando la evolución de la distribución radial del nivel de fluctuaciones (Fig. 5.5).

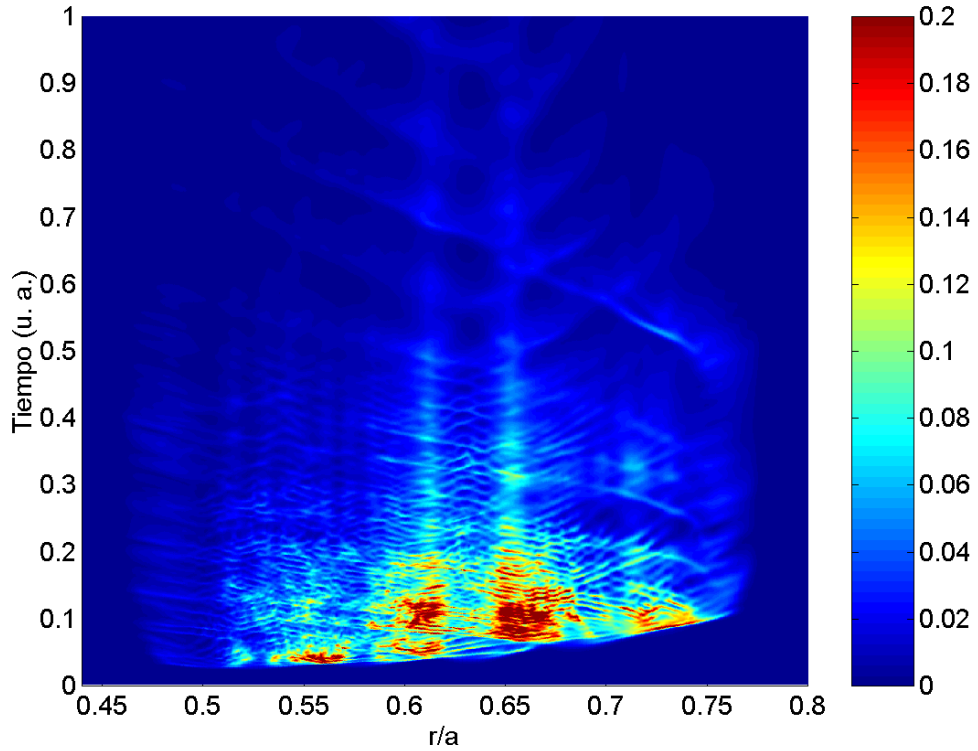


Figura 5.5: Mapa de color en el plano $(t-r)$ del nivel de fluctuaciones de la densidad sin difusividad ($D_{\text{ext}} = 0$).

Llegada la fase no lineal, el sistema satura y el transporte inducido aplana el perfil, reduciéndose a continuación las fluctuaciones a lo largo de toda la distribución radial de la densidad. Esto sucede a partir de $\Omega_i t \sim 0.2 \times 10^6$.

Si hacemos un análisis de la estabilidad lineal del perfil resultante se puede comprobar que las tasas de crecimiento son negativas para todos los modos. Así, se llega a una configuración cuyo perfil relajado [Fig. 5.6(a)] es estable y en con-

secuencia el nivel de fluctuaciones decrece indefinidamente [Fig. 5.6(b)]. Una vez obtenido el perfil relajado sin fuente y sin difusión, calcular numéricamente el umbral de inestabilidad turbulento $L_{n_{ul}}^c = n/|dn/dr|$ es inmediato. En la Fig. 5.7 se muestra dicho perfil con una línea azul. Se corresponde con el perfil de densidad relajado de la Fig. 5.6(a). Como ya se explicó anteriormente, los valores obtenidos son menores que los correspondientes al análisis lineal (línea discontinua). Finalmente, el perfil de L_n inicial (línea roja en la Fig. 5.7) es el que presenta valores más pequeños ya que se corresponde al perfil de densidad inicial que es altamente inestable frente a modos DTEM (notar que cuando nos movamos por zonas que estén debajo de L_n tendremos inestabilidad y viceversa).

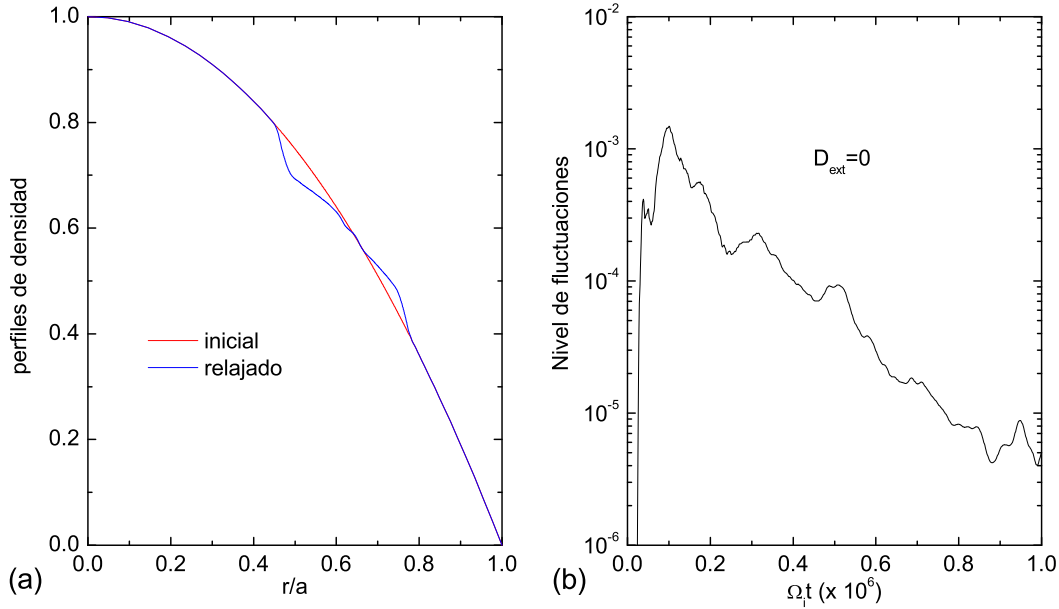


Figura 5.6: (a) Perfiles de densidad inicial y relajado con $D_{ext} = 0$ y (b) evolución temporal del nivel de fluctuaciones de la densidad sin difusividad.

Así, el código diseñado que evoluciona fluctuaciones y perfil muestra, en ausencia de difusión, el ciclo dinámico descrito anteriormente, que es la base del paradigma SOC. Como resultado, el transporte manifiesta en este caso las características SOC ya vistas en otros códigos basados en diferentes mecanismos de desestabilización local tales como modos por gradiente de presión, modos de intercambio y modos ITG. Por lo tanto, este modelo es otro ejemplo de la universalidad del paradigma SOC, cuyas propiedades globales son independientes de los detalles concernientes a la física local del sistema. En la siguiente sección confirmaremos este hecho de forma explícita y cuantitativa.

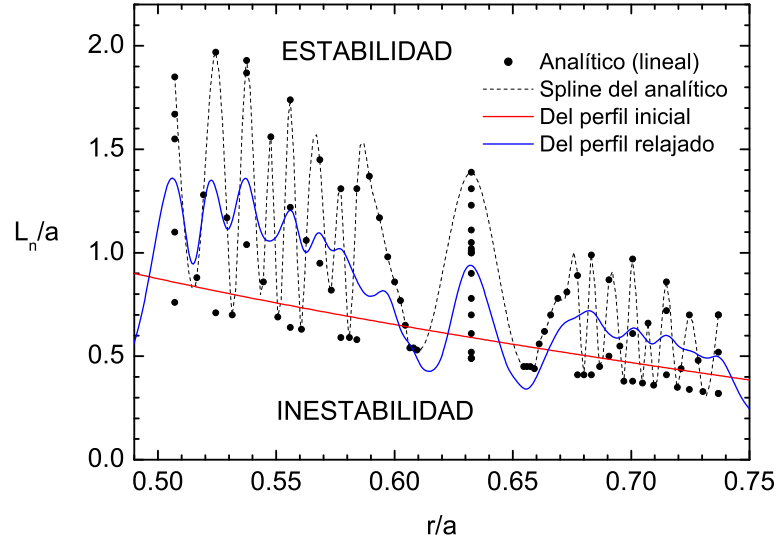


Figura 5.7: Perfiles radiales de L_n . Puntos: cálculo analítico para cada modo individual (lineal). Línea negra discontinua: Spline del cálculo analítico, tomando como valor crítico para cada superficie racional el máximo. Línea roja: Perfil de L_n obtenido a partir de la densidad inicial de equilibrio. Línea azul: Perfil de L_n obtenido a partir del perfil de densidad relajado en estado estacionario sin fuente ($L_{n_{nl}}^c$).

5.9. Dinámica del transporte con difusión.

CASO I: $\tilde{S}(r, t) = 0$

En la sección anterior estudiamos el comportamiento de la densidad fluctuante sin difusión. Ahora introduciremos una difusión constante sobre el perfil $D_{\text{ext}} = D_0 > 0$. Esto implica que la fuente S_0 debe ser no nula para alcanzar un estado estacionario. En coordenadas cilíndricas, para que la fuente cancele idénticamente a la difusión se tiene que cumplir $S_0 = 4D_0$, de manera que en ausencia del término no lineal en la Ec. (2.35) el perfil estacionario resultante sea de nuevo el parabólico del que partíamos.

Cuando se realizan las simulaciones con difusividad no nula sobre el perfil, las fluctuaciones no decaen indefinidamente llegada la fase no lineal, sino que saturan a un nivel constante (en promedio) después de un periodo transitorio que es inversamente proporcional a D_0 . En la Fig. 5.8 se muestra nuevamente la evolución de la distribución radial del nivel de fluctuaciones para diferentes valores de la difusividad sobre el perfil. A medida que ésta aumenta, el nivel de saturación también lo hace. Esto es debido a que el estado estacionario requiere la existencia de un flujo radial que esté equilibrado con la fuente externa integrada [Ec. (5.7)]. Este flujo ha de distribuirse entre los canales de transporte turbulento y difusivo.

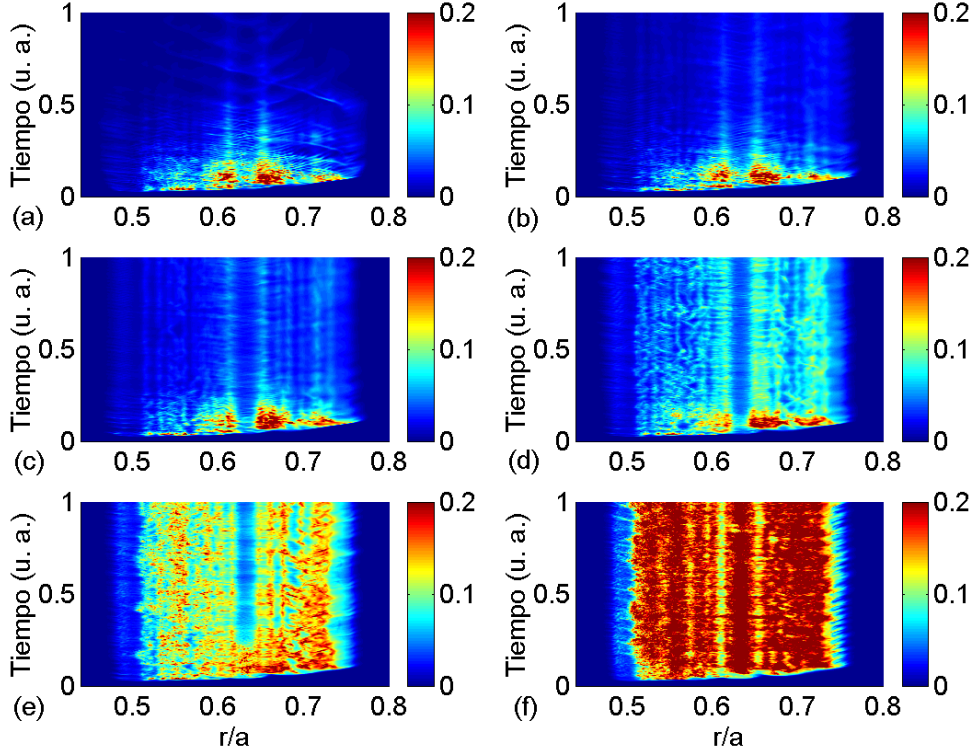


Figura 5.8: Mapa de colores en el plano $(t-r)$ del nivel de fluctuaciones de la densidad para seis valores distintos de la difusividad externa sobre el perfil. Los valores numéricos son: (a) $D_0 = 0$, (b) $D_0 = 10^{-9} a^2 \Omega_i$, (c) $D_0 = 3 \times 10^{-9} a^2 \Omega_i$, (d) $D_0 = 10^{-8} a^2 \Omega_i$, (e) $D_0 = 3 \times 10^{-8} a^2 \Omega_i$ y (f) $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$.

Como vimos en la sección anterior, el flujo turbulento generado por las fluctuaciones trata de aplanar los gradientes locales de manera que el valor local de L_n esté por encima del crítico. Por otro lado, en el momento que no exista transporte turbulento el canal difusivo tiene que activarse para así equilibrar la fuente externa. Esto requiere aumentar el flujo difusivo aumentando el gradiente, ya que $\Gamma_d = -D_0 \nabla_r n_0$ y el coeficiente de difusión es fijo. Así, L_n disminuye hasta quedar nuevamente por debajo del valor crítico, generando inestabilidad y activando el canal turbulento otra vez. En estado estacionario este proceso se repite una y otra vez, dando lugar a un nivel de fluctuaciones finito. A medida que aumenta D_0 , una mayor proporción del transporte total se lleva a cabo a través del canal difusivo. Esto requiere un perfil estacionario más parecido al inicial [Fig. 5.9(a)]. En cambio, a medida que nos acercamos al límite $D_0 \rightarrow 0$, el perfil se irá pareciendo más al que obtuvimos en la sección anterior cuando el canal difusivo no existía. Decir que el perfil estacionario se parece más o menos al inicial es equivalente a decir que el perfil es más o menos inestable frente a modos DTEM. Así, cuando el valor de D_0 sea alto tendremos un perfil “poco modificado” o lo que es lo mismo,

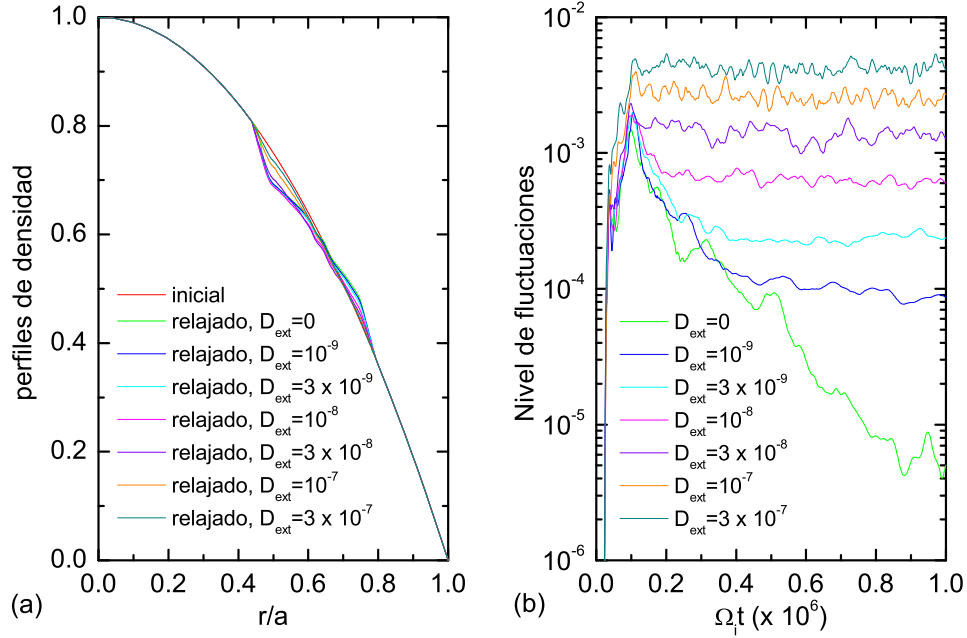


Figura 5.9: (a) Perfiles de densidad inicial (línea roja) y relajado para diferentes valores de D_0 . (b) Evolución temporal del nivel de fluctuaciones para los valores de D_0 vistos en (a).

el nivel de fluctuaciones será alto. En cambio, cuando la difusividad sea baja el perfil estará “más relajado” y el nivel de fluctuaciones será más bajo. En la Fig. 5.9(b) se muestra el nivel de fluctuaciones global en el estado estacionario para diferentes valores de D_0 . El nivel de fluctuaciones escala aproximadamente como $\langle \tilde{n}^2 \rangle \sim D_0^{3/4}$ (Fig. 5.10). Hay que notar que, dado que se eligió $S_0 = 4D_0$ para mantener el perfil estacionario y que el escalado del flujo turbulento es sublineal con D_0 , el transporte a través del canal difusivo ha de aumentar con D_0 , como cabría esperar.

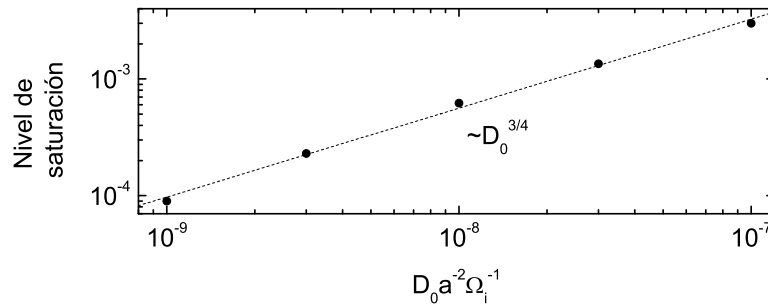


Figura 5.10: Nivel de saturación para las fluctuaciones en función de D_0 .

Finalmente, el hecho de incorporar una difusividad finita sobre el perfil influye

en el tiempo que éste pueda estar en una situación subcrítica [$L_n(r) > L_n^c(r)$] o supercrítica [$L_n(r) < L_n^c(r)$]. Si D_0 es grande, el tiempo que el perfil tarda en hacerse supercrítico debido a la difusión es menor que el que la turbulencia DTEM requiere para hacerlo subcrítico. Así, el perfil promedio será supercrítico. Sin embargo, si D_0 toma valores pequeños, el tiempo que tarda el perfil en hacerse supercrítico será mayor que el que emplea la turbulencia en estabilizarlo, de forma que ahora el perfil promedio será más cercano al crítico.

5.9.1. Efecto de borde en la interacción entre los canales turbulento y difusivo.

En la sección 5.7 se discutía la necesidad de introducir una fuente para compensar las pérdidas por difusión y así poder llegar a un perfil estacionario. En realidad, con una fuente como aquella no se puede llegar a un perfil estacionario considerando además el canal de transporte turbulento. Si la difusión queda equilibrada por la fuente pero además existe transporte turbulento tenemos un déficit por el que no será posible llegar a un perfil estacionario. La densidad que el canal turbulento va depositando en las inmediaciones de r_{ex} se va transportando por el canal difusivo hasta $r = 1$, mientras que el hueco que genera en las inmediaciones de r_{in} se transporta, también difusivamente, hasta $r = 0$. Globalmente, tenemos que el perfil se irá “cayendo” o aplanando en su interior (aproximación o turbulencia FD). Esto no ocurre cuando $D_0 = 0$ (Fig. 5.11). En este caso la densidad (o el hueco), simplemente se acumula en r_{ex} (r_{in}) hasta que los valores locales de $L_n(r)$ en la zona $r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$ se hagan mayores que el crítico y así desaparezcan las fluctuaciones. Sin embargo, los perfiles de la Fig. 5.9(a) no se aplanan a pesar de que en la mayoría de los casos $D_0 \neq 0$. Esto sucede porque están congelados en las zonas $r < r_{\text{in}}$ y $r > r_{\text{ex}}$ (hay que recordar que estamos bajo la aproximación de turbulencia MGD y no FD). Esto es equivalente a introducir una fuente sobre el perfil que equilibre las pérdidas generadas por la interacción entre los canales turbulento y difusivo en el borde.

5.10. Dinámica del transporte con difusión.

CASO II: $\tilde{S}(r, t) \neq 0$

La mejor vía para conseguir que el sistema manifieste las propiedades características de los sistemas SOC es añadirle una fuente fluctuante (de esto se habló en la sección 5.3). Así, el siguiente paso será dotar de una parte fluctuante $\tilde{S}(r, t)$ a la fuente que ya teníamos. Esto se consigue perturbando el perfil de densidad de forma aleatoria, tanto espacial como temporalmente, de la misma forma que se perturba un sandpile para llegar al estado SOC: en cada paso temporal se añade

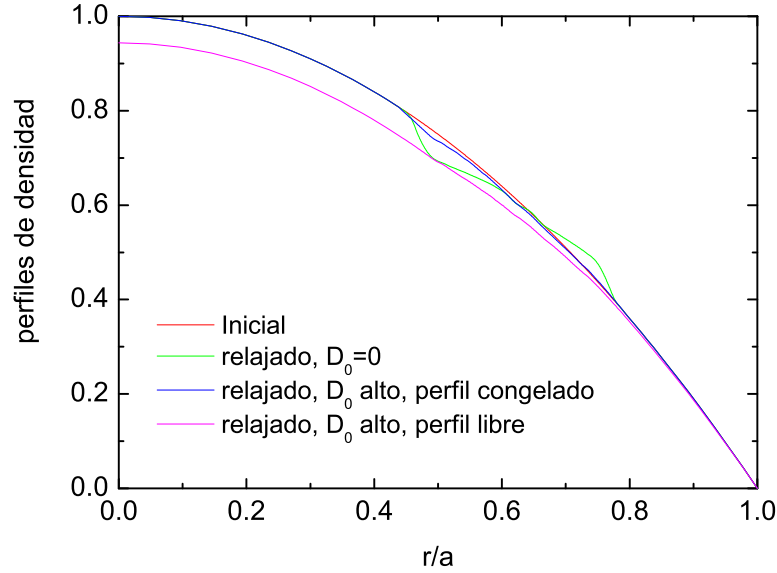


Figura 5.11: Perfiles de densidad. Línea roja: perfil inicial. Línea verde: perfil relajado con $D_0 = 0$. Línea azul: perfil relajado con alta difusividad. El perfil se mantiene congelado en los intervalos $r < r_{in}$ y $r > r_{ex}$. Línea magenta: perfil relajado con alta difusividad. El perfil es libre.

una perturbación sobre el perfil con una probabilidad P , que tiene valores típicos entre 10^{-2} y 10^{-3} , o lo que es lo mismo, el sistema se perturba cada $10^2 - 10^3$ pasos. La localización radial es aleatoria en el intervalo $r \in [r_{in}, r_{ex}]$ y la forma de las perturbaciones es Gaussiana, con anchuras típicas 5×10^{-3} veces el radio menor y amplitudes típicas 0.02 veces el valor local de la densidad.

La elección de D_{ext} será en este caso diferente a la que hicimos en la sección anterior donde era constante a lo largo de todo el radio. Como necesitamos mantener el perfil parabólico inicial, se ha de cumplir $S_0 = 4D_0$, lo que implica que el flujo difusivo de partículas entrando en el intervalo $[r_{in}, r_{ex}]$ procedente de la zona central es $2D_0r_{in}$, que cambia con el valor de D_0 . Por otro lado, si queremos estudiar la interacción entre la difusión y la turbulencia en $[r_{in}, r_{ex}]$, precisaremos un flujo independiente del valor de D_0 entrando en el citado intervalo. Para ello, utilizaremos la expresión (5.10) definida antes para fijar D_{ext} en lugar de una difusividad constante. Mantendremos D_{in} constante en todas las simulaciones y lo suficientemente pequeña como para remover los huecos generados en r_{in} debido al transporte turbulento sin que ello influencie en gran medida el nivel de turbulencia en sí. D_{ex} se mantiene también constante pero a un valor mayor. Así aseguramos el transporte hacia el exterior de las partículas acumuladas en r_{ex} .

Procedemos a continuación a variar D_0 , el valor de la difusividad en $[r_{in}, r_{ex}]$. Si $D_0 = 0$, el sistema exhibe el típico comportamiento SOC. A medida que se van añadiendo perturbaciones sobre el perfil van surgiendo inestabilidades locales

que generan transporte para aplanar el perfil en las distintas superficies racionales. Cuando se cumpla la condición de estabilidad, $L_n > L_n^c$, el canal de transporte turbulento dejará de actuar. Pero este proceso de aplanamiento local implica un aumento de los gradientes en zonas adyacentes o lo que es lo mismo, una reducción de L_n , que genera nuevas inestabilidades. Este proceso, globalmente, genera transporte en forma de avalanchas, como se puede apreciar en la Fig. 5.12(a), donde se muestran los contornos de la densidad incremental promedio, $\langle n(r, t) \rangle - \langle n(r) \rangle_{ee}$, en función del radio y del tiempo para $D_0 = 0$ [$\langle n(r) \rangle_{ee}$ es el perfil de densidad en estado estacionario obtenido tras relajar el perfil inicial n_0].

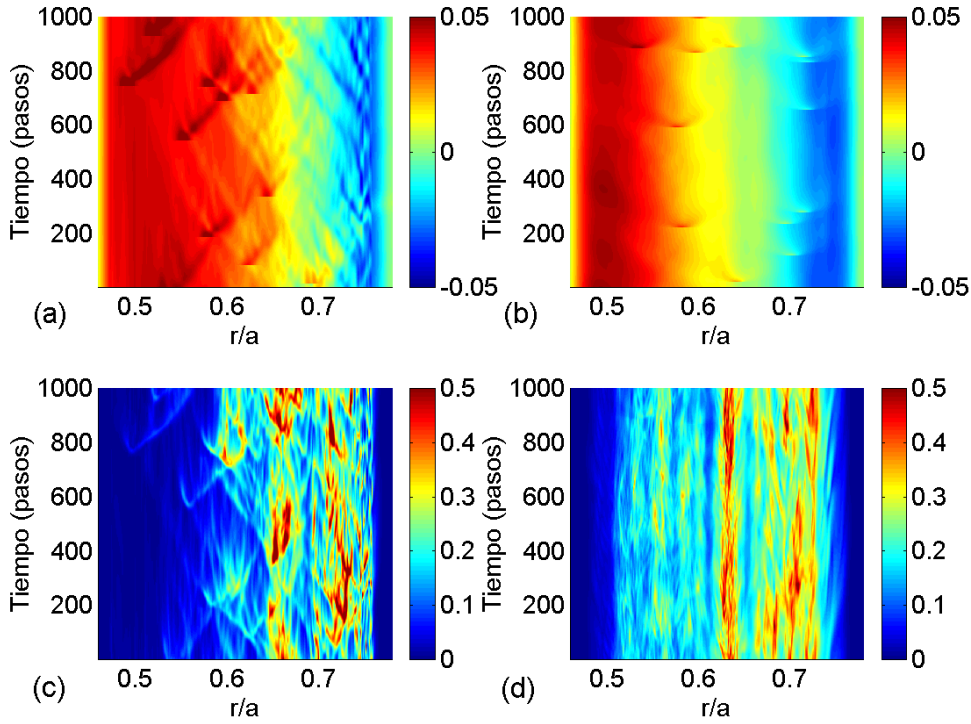


Figura 5.12: Mapa de colores en el plano $(t-r)$ de (a) la densidad acumulada promedio con $D_0 = 0$, (b) la densidad acumulada promedio con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, (c) la raíz cuadrática media de la densidad fluctuante con $D_0 = 0$ y (d) la raíz cuadrática media de la densidad fluctuante con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, en presencia de la fuente externa fluctuante \tilde{S} .

Se aprecia el carácter de avalancha en los eventos de transporte siguiendo las trazas que comienzan en los lugares en los que se perturba el perfil. A continuación las perturbaciones se propagan, tanto hacia el interior como hacia el exterior. En la Fig. 5.12(b) la situación cambia. En este caso, estamos en el valor límite que toma D_0 para que la dinámica del sistema sea puramente difusiva, como veremos más adelante. Analizando las trazas después de cada perturbación se llega a la conclusión de que los eventos de transporte tienen todos la misma escala,

a diferencia de lo que se ve en el caso no difusivo, donde aparecen avalanchas de diferentes tamaños. La difusión rápidamente “suaviza” las perturbaciones que introduce \tilde{S} , de manera que el transporte ya no se debe únicamente al ciclo turbulento. Ahora tenemos una interacción entre los canales difusivo y turbulento donde el primero erosiona las pequeñas inhomogeneidades generadas por el segundo, de manera que globalmente el proceso de transporte se vuelve prácticamente difusivo. En la sección anterior vimos que en el primero de los casos ($D_0 = 0$) el nivel de fluctuaciones decrecía indefinidamente y la explicación era sencilla: al no existir fuente ni difusión, el perfil se relajaba y la inestabilidad desaparecía. Ahora, en cambio, tenemos una fuente fluctuante adicional \tilde{S} , que genera inestabilidad. En las Figs. 5.12(c)–(d) tenemos el nivel de fluctuaciones en función del radio y del tiempo para $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$ respectivamente. En (c) se observa un nivel de fluctuaciones más disperso mientras que en el segundo es más homogéneo. Además, para $D_0 = 0$ se pueden ver las trazas debidas a la evolución en forma de avalancha de las fluctuaciones generadas por \tilde{S} , de igual manera que sucedía con la densidad incremental promedio. En cambio, para $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, el nivel de fluctuaciones es, en cada posición radial, aproximadamente independiente del tiempo ya que el perfil tiene muy poca dinámica debido a la alta difusividad que lo obliga a mantenerse siempre cercano a la solución estacionaria difusiva, que es parabólica.

Para difusividades comprendidas entre las dos anteriores, los fenómenos de transporte se caracterizarán por la presencia de avalanchas, influenciadas por la difusión colisional. Cuando esta difusión sea muy pequeña, se darán avalanchas parecidas a las de la Fig. 5.12(a). En cambio, para valores de D_0 cercanos al límite $10^{-7} a^2 \Omega_i$, la difusión irá tomando mayor importancia y los sucesos de transporte serán más parecidos a lo que se muestra en la Fig. 5.12(b), donde la dinámica de transporte es puramente difusiva. Por lo tanto, siempre que $D_0 < 10^{-7} a^2 \Omega_i$, el transporte se caracterizará por la presencia de avalanchas y la dinámica será tipo SOC. Cuando $D_0 \geq 10^{-7} a^2 \Omega_i$, la dinámica será puramente difusiva.

Hemos visto de forma cualitativa el cambio en la dinámica del sistema cuando se varían las intensidades relativas entre los dos canales de transporte. Para cuantificarlo, construiremos una medida global de la actividad turbulenta en el intervalo $[r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$ que denominaremos “actividad turbulenta” y designaremos por $g(t)$. Se construye evaluando en cada paso temporal el número de nodos que son inestables frente a modos DTEM dentro de $[r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$, esto es, los lugares r_i para los que se cumple el criterio de inestabilidad $L_n(r_i) < L_n^c(r_i)$. Así, cuando el perfil sea estable en todos los puntos tendremos $g(t) = 0$. Para el caso más turbulento posible, en cambio, el perfil será inestable en todos los puntos dentro de $[r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$ y por tanto $g(t) = N_0$, siendo N_0 el número de puntos en el intervalo.

Como ejemplo, las Figs. 5.13(a)–(b) muestran los registros de $g(t)$ para los dos casos anteriores. Lo primero que resalta es el diferente número de puntos que,

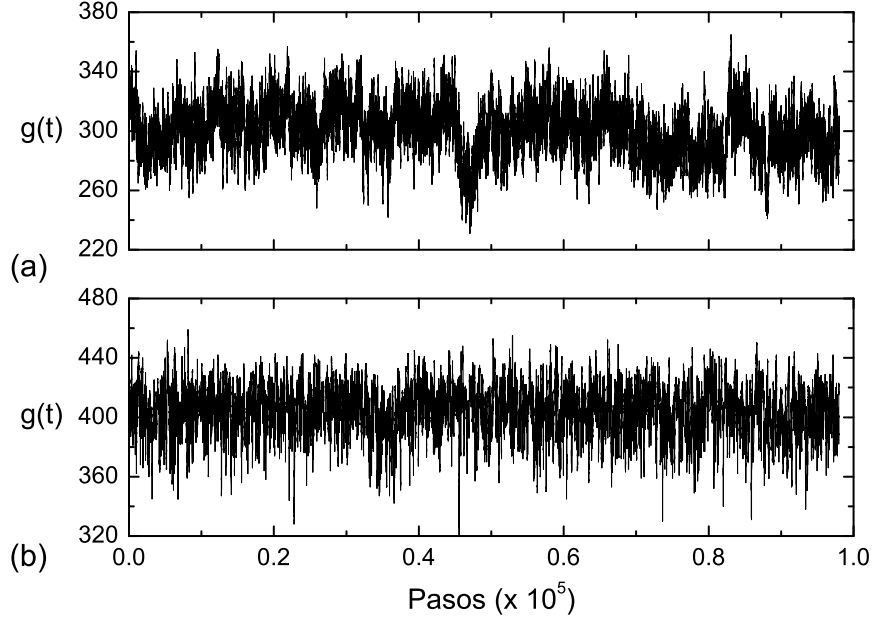


Figura 5.13: Series temporales de la “actividad turbulenta” $g(t)$. (a) $D_0 = 0$, (b) $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$.

en promedio, son inestables. Así, para $D_0 = 0$ el promedio temporal de $g(t)$ es de 300, mientras que para alta difusión ese valor asciende a 407. Además, la serie correspondiente a $D_0 = 0$ presenta oscilaciones con escalas temporales mayores, mientras que para $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, el comportamiento parece más homogéneo. Esto está en acuerdo con el hecho de que en el primero de los casos los fenómenos de transporte son debidos a avalanchas mientras que en el segundo de ellos la alta difusión no lo permite.

En la Fig. 5.14(a) se muestran los promedios de $g(t)$ en función de la difusividad sobre el perfil. Existe una transición gradual del régimen puramente turbulento al régimen puramente difusivo. A medida que aumenta el valor de D_0 , el número de nodos que se vuelven inestables en la malla radial también lo hace de forma gradual. Esto es así porque el perfil se va haciendo más inestable. En ausencia de difusión el perfil puede estar relajado durante grandes lapsos de tiempo después de cualquier perturbación, mientras que cuando la difusividad es alta se verá forzado hacia el estado supercrítico más rápidamente. Así, en el primero de los casos, en promedio, habrá más puntos estables ya que el sistema permanece más tiempo relajado.

Existen dos asíntotas para el promedio temporal, $\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(t_i)$, respecto a los valores límite que D_0 puede tomar,

$$\bar{g} \approx \begin{cases} 300, & D_0 \rightarrow 0 \\ 407, & D_0 \geq 10^{-7} a^2 \Omega_i. \end{cases} \quad (5.11)$$

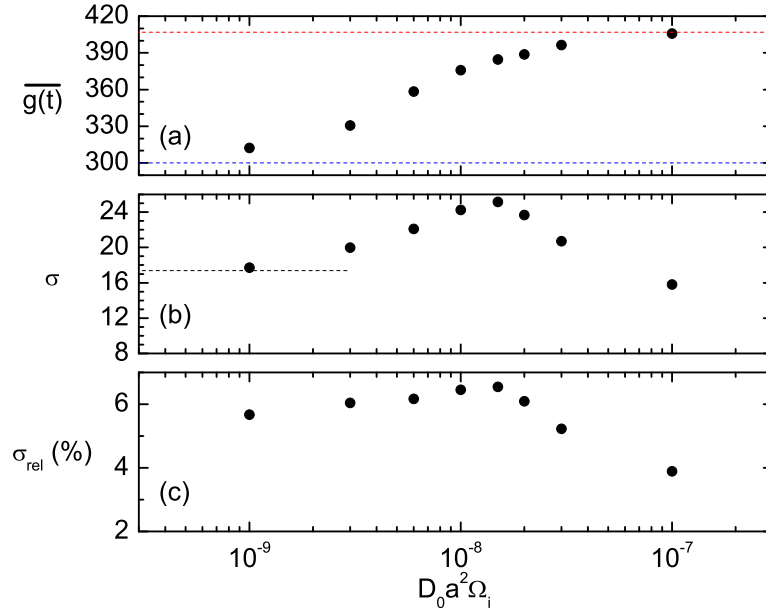


Figura 5.14: (a) Promedio de $g(t)$ en función de D_0 . También se muestran los límites asintóticos inferior ($D_0 = 0$, línea discontinua azul) y superior ($D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, línea discontinua roja). (b) Desviación estándar de $g(t)$ en función de D_0 . La línea discontinua representa el límite asintótico para $D_0 = 0$. (c) Desviación estándar relativa.

El límite superior queda todavía lejos del máximo valor que $g(t)$ puede tomar ($N_0 = 541$).

La desviación estándar, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [g(t_i) - \bar{g}]^2}$, determina la dispersión de los registros $g(t)$ [Fig. 5.14(b)]. Físicamente, una dispersión pequeña indica una pequeña variabilidad del perfil y viceversa. Se aprecia un cambio en la tendencia para $D_0 \approx 1.5 \times 10^{-8} a^2 \Omega_i$. También tenemos comportamientos asintóticos. Para $D_0 = 0$ el valor asintótico de σ es 17, lo que supone un 5.7% respecto de la media [Fig. 5.14(c)], mientras que para altas difusividades la tendencia asintótica es hacia cero lo que indica que la señal se va haciendo más constante o menos variable y por lo tanto el perfil también.

Es difícil establecer conclusiones acerca de los cambios en la dinámica mediante una simple inspección visual de las señales temporales. Para cuantificar mejor el cambio en la dinámica, utilizaremos a continuación tres herramientas estadísticas: la función de autocorrelación, el espectro de potencia y el análisis R/S de las señales $g(t)$ para diferentes valores de la difusividad.

5.10.1. Función de autocorrelación

La primera herramienta que exploraremos será la función de autocorrelación de la actividad turbulenta, cuyas gráficas pueden verse en la Fig. 5.15. El eje de abscisas da cuenta del paso temporal, cuyo valor es en todos los casos $\Omega_i \Delta t = 50$. A partir

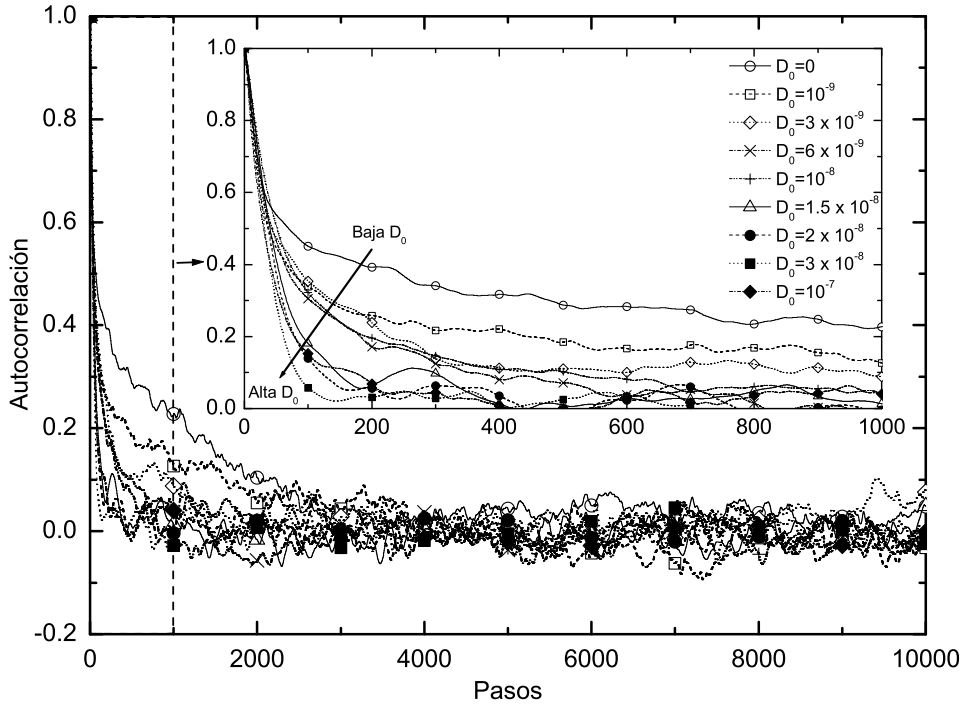


Figura 5.15: Función de autocorrelación para diferentes valores de D_0 .

de las funciones de autocorrelación se pueden hacer dos observaciones. En primer lugar, la anchura típica de la función de autocorrelación, Δ_d^g , decrece con D_0 . Como ejemplo, las anchuras en 0.3 para los casos límite $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ son $\Delta_d^g \sim 500 \Delta t$ y $\Delta_d^g \sim 50 \Delta t$ respectivamente. El factor 10 de diferencia es un reflejo de lo que ya se vio en la Fig. 5.12(b). La duración de los eventos de transporte generados por el canal turbulento se reduce a medida que la difusión aumenta. Así, suponiendo un plasma de deuterio confinado en un dispositivo de radio menor $a = 0.25 \text{ m}$ y $B_0 = 1 \text{ T}$, tenemos $\Omega_i \sim 7.7 \times 10^6 \text{ Hz}$, por lo tanto $\Delta t \sim 6.5 \times 10^{-6} \text{ s}$. Y para los tiempos de decorrelación, $\Delta_d^g \sim 3 \text{ ms}$ para $D_0 = 0$ y $\Delta_d^g \sim 300 \mu\text{s}$ para $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ (que se corresponde con $D_0 \sim 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$). La segunda y no menos importante observación es que cuando se llega al valor límite $D_0 \sim 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, las colas prácticamente desaparecen de las funciones de autocorrelación, indicando que en estos regímenes el perfil ya deja de presentar correlaciones a escalas temporales grandes. El hecho de que la función de autocorrelación no corte al eje temporal en tiempos pequeños suele ser indicativo de que el decaimiento es tipo ley de

potencia y no exponencial. En cambio, cuando el corte se produce en unos pocos pasos temporales, como sucede cuando $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2\Omega_i$, se puede concluir que el decaimiento es exponencial y que se está llegando al valor límite de D_0 para el cual el perfil deja de tener correlaciones sobre escalas temporales grandes. Para establecer este carácter de forma más cuantitativa recurriremos al análisis R/S de las señales $g(t)$.

5.10.2. Análisis R/S

El análisis R/S es otro método empleado para buscar correlaciones de señales en escalas temporales grandes. Fue propuesto por Mandelbrot y Wallis [62], basándose en el trabajo previo de Hurst [63]. Se realiza siguiendo una serie de pasos. En primer lugar, se sustrae la media de la señal, $\hat{g}(t) = g(t) - \bar{g}$. A continuación, supongamos que $\hat{g}(t)$ es la función generadora de los incrementos en un random walk en un instante dado. La distancia recorrida por el caminante será, en un tiempo τ : $G(\tau) = \int_{\tau} \hat{g}(t) dt$. Definimos el rango del movimiento como la diferencia entre el máximo y el mínimo de G entre el tiempo inicial y τ . Finalmente, reescalamos el rango mediante la desviación estándar de la señal, obteniendo así la cantidad R/S que es el rango reescalado.

Si la señal $\hat{g}(t)$ es autosimilar en el tiempo durante un intervalo determinado, el estimador R/S debe crecer como una potencia de τ , $R/S \propto \tau^H$, en ese intervalo. H se conoce como parámetro de Hurst. Si la señal es persistente sobre el intervalo (es decir, está correlacionada y hay una alta probabilidad de que el movimiento aleatorio persista en la misma dirección), entonces $0.5 < H < 1$. En cambio, si es antipersistente (y por lo tanto está correlacionada pero ahora hay una alta probabilidad de que el movimiento aleatorio cambie de dirección) tendremos $0 < H < 0.5$. Cuando $H = 0.5$ diremos que la señal es aleatoria (y por tanto el movimiento será equiprobable en ambas direcciones). Finalmente, $H = 1$ significa una correlación perfecta (este es el valor que toma el parámetro de Hurst en torno al pico central de la función de autocorrelación).

Por lo tanto, no sólo utilizaremos el análisis de Hurst para detectar fenómenos de autosimilaridad y memoria, sino también para obtener los rangos temporales sobre los que se mantienen activos. Así, se han realizado los análisis R/S de las mismas señales temporales que se utilizaban en la sección anterior. En todos los casos se observan básicamente dos zonas [Fig. 5.16(a)]. Una primera, para retardos pequeños, caracterizada por tener $H = 1$, que se corresponde con las inmediaciones del pico de la función de autocorrelación. La segunda zona, para retardos mayores, se corresponde con la zona de la función de autocorrelación que decae como una ley de potencia y que por tanto será una recta en el diagrama R/S en escala log-log al representar una dinámica autosimilar. Echando una mirada atrás (Fig. 5.15) podemos comprobar que esta segunda zona se sitúa en la franja temporal comprendida en el intervalo $\tau \in [10^3, 10^4]$.

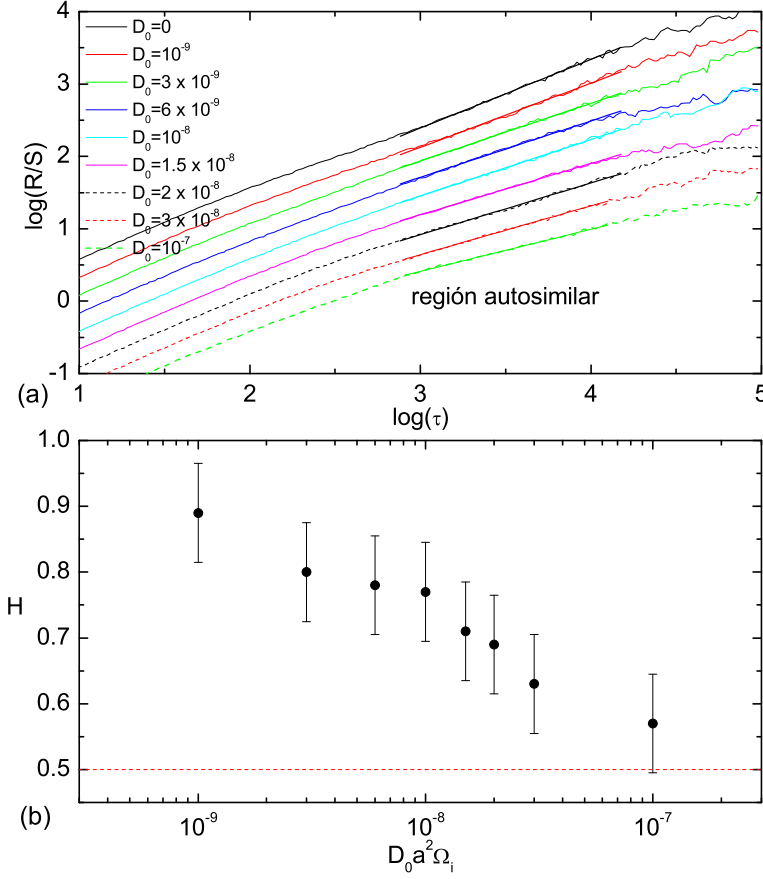


Figura 5.16: (a) Análisis R/S de las señales $g(t)$ para diferentes valores de D_0 . También se señala la región autosimilar. (b) Estimaciones del parámetro de Hurst mediante el ajuste lineal de los rangos reescalados en el intervalo autosimilar en función de D_0 . La línea roja discontinua representa $H = 0.5$.

En la Fig. 5.16(a) se han ajustado todos los rangos rescalados en el intervalo autosimilar, $\tau \in [10^3, 10^4]$, a una recta. La pendiente de la recta del ajuste será por lo tanto nuestra estimación del parámetro de Hurst en la zona de autosimilaridad. Hay que notar que cuando nos movemos en las zonas correspondientes a retardos mayores que 10^4 la estadística se reduce considerablemente. Por consiguiente, el error estadístico en el cálculo del rango reescalado aumenta. Muestra de ello es la forma fluctuante de las señales R/S para $\tau > 10^4$. Aun así, las correlaciones persisten por tiempos comparables a la duración de las simulaciones numéricas, que son aproximadamente 200 veces el tiempo de decorrelación de la turbulencia para el caso $D_0 = 0$. Estos tiempos de simulación ya son suficientes para captar la dinámica.

El resultado correspondiente a los ajustes lineales de las señales reescaladas se muestra en la Fig. 5.16(b). Cuando la difusividad es nula, las correlaciones y la

persistencia del sistema se hacen patentes tras calcular el exponente de Hurst de la señal $g(t)$. En ese caso se obtiene el más alto de los valores, $H \sim 0.9$. Para valores crecientes de D_0 , el parámetro de Hurst decrece, hasta llegar a $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, en donde $H \sim 0.57$. Por lo tanto, cuando la difusividad toma valores cercanos o superiores a $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, se llega a la frontera en la que el canal difusivo comienza a adquirir importancia relativa frente al turbulento, pasando el sistema a tener una dinámica sin correlaciones y sin memoria.

Hay que notar que estos resultados están sujetos a un error considerable (10 – 15 %) debido a que el análisis de Hurst es en sí una herramienta poco precisa si se tiene en cuenta que se realizan ajustes de funciones en escala log-log.

5.10.3. Espectro de potencia

Finalmente, procedemos a analizar los espectros de potencia de las señales $g(t)$. En la Fig. 5.17(a) se muestran sus gráficas para diferentes casos. Se observan zonas con decaimiento algebraico, $P(f) \sim f^{-\theta}$, típicas de sistemas cuya dinámica tiene distintas propiedades de autosimilaridad sobre diferentes escalas [55, 61]. Nos centraremos en las propiedades referentes a la memoria/persistencia del sistema. En primer lugar, se encuentra que la zona autosimilar comienza a frecuencias $f_b \simeq \tau_H^{-1}$, siendo τ_H el retardo para el que comienza la zona autosimilar en el análisis R/S . Concretamente, las décadas comprendidas entre las frecuencias $[10^{-4}, 10^{-2}] \Delta t^{-1}$ engloban la década en la que hacíamos los ajustes lineales en la sección anterior. Para frecuencias mayores que $10^{-2} \Delta t^{-1}$, la información del espectro de potencia tiene que ver con la dinámica de procesos individuales. Para frecuencias menores que f_b , aparecen las regiones $1/f^\theta$, siendo $0 < \theta < 1$ en el caso de fenómenos persistentes ($\theta < 0$ en caso contrario). Para $D_0 = 0$ se encuentra una región en la que $\theta \simeq 1$. Originalmente, se pensaba que ésta debía ser una de las características necesarias para que un sistema poseyera dinámica tipo SOC [48, 55, 61]. Para valores finitos y crecientes de D_0 , la región autosimilar sigue existiendo, pero el exponente θ se reduce. A medida que el valor de D_0 se va aproximando al valor crítico $D_0 = D_0^{\text{crit}} = 10^{-7} a^2 \Omega_i$, la dinámica va pasando gradualmente de ser SOC a ser puramente difusiva. Así, en el espectro de potencia la zona autosimilar se va estrechando hasta desaparecer, ya que las avalanchas también desaparecen. Además, el exponente de decaimiento θ pasa de valer +1 en el caso no difusivo hasta 0 en el límite puramente difusivo.

En la Fig. 5.17(b) se muestran dos espectros de potencia superpuestos, correspondientes a difusividades baja y alta respectivamente. Cuando $D_0 \rightarrow 0$, los sucesos de baja frecuencia tienen mayor peso relativo respecto a los casos en los que la difusividad es alta, debido a que es más probable que se den grandes avalanchas extendidas a lo largo de la dirección radial. En cambio, para frecuencias intermedias sucede lo contrario. Además, en el primero de los casos la pendiente en la zona autosimilar tiene un valor de $\theta \simeq -1$, mientras que para alta difusividad

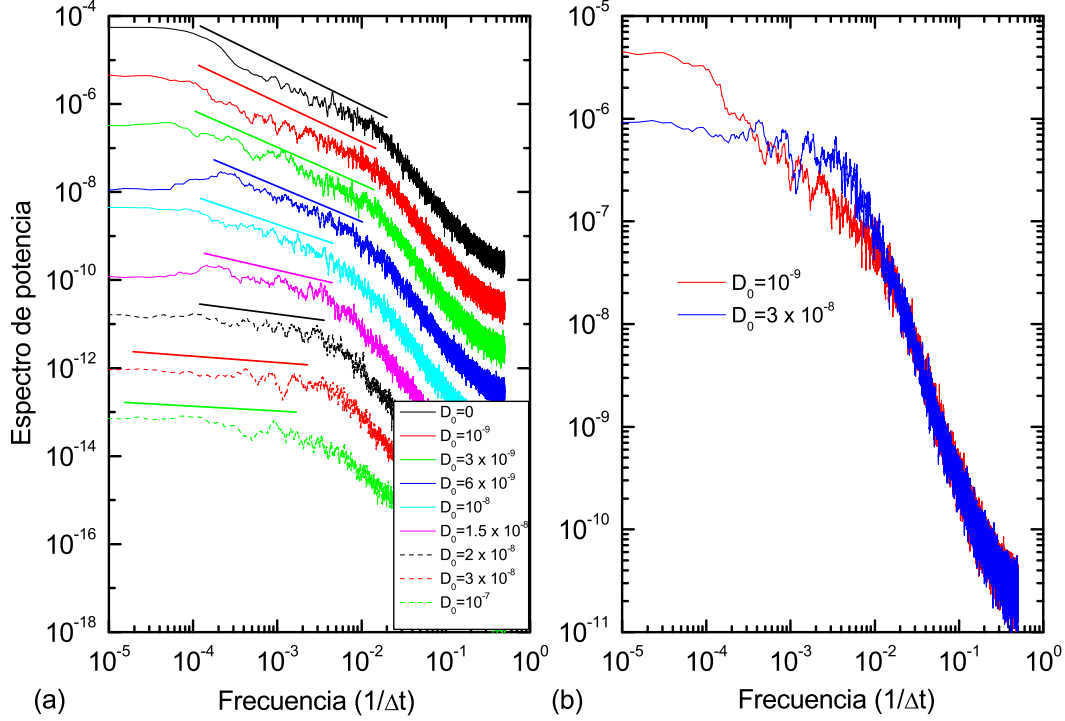


Figura 5.17: (a) Espectros de potencia de la actividad turbulenta $g(t)$ para diferentes valores de D_0 . (b) Espectros de potencia superpuestos para difusividades baja y alta respectivamente.

la zona autosimilar desaparece, siendo nula la pendiente a bajas frecuencias.

5.10.4. Tiempo de confinamiento y difusividad efectiva

Para estimar el tiempo de confinamiento, supondremos que el proceso de transporte es puramente difusivo. Así, podremos estimar un coeficiente de difusión efectivo o turbulento, D_{tur} , a partir del perfil de densidad promedio y de la fuente de energía externa,

$$D_{\text{tur}}(r) = \left\langle \frac{\Gamma(r)}{\nabla_r n(r)} \right\rangle = \left\langle \frac{\int_0^r \tilde{S} dr}{\nabla_r n(r)} \right\rangle. \quad (5.12)$$

Los paréntesis angulares representan el promedio temporal. En la Fig. 5.18 se muestran las difusividades efectivas promediadas temporalmente para $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$. En ambos casos D_{tur} aumenta con el radio y los promedios radiales son parecidos, $D_{\text{tur}} = 1.09 \times 10^{-6} \text{ a}^2 \Omega_i$ para $D_0 = 0$ y $D_{\text{tur}} = 1.03 \times 10^{-6} \text{ a}^2 \Omega_i$ para $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$. La línea horizontal discontinua representa el valor numérico del canal difusivo en el caso más extremo, $D_0 = D_0^{\text{crit}} = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$. Visualmente, es la confirmación de que el canal de transporte turbulento es dominante frente

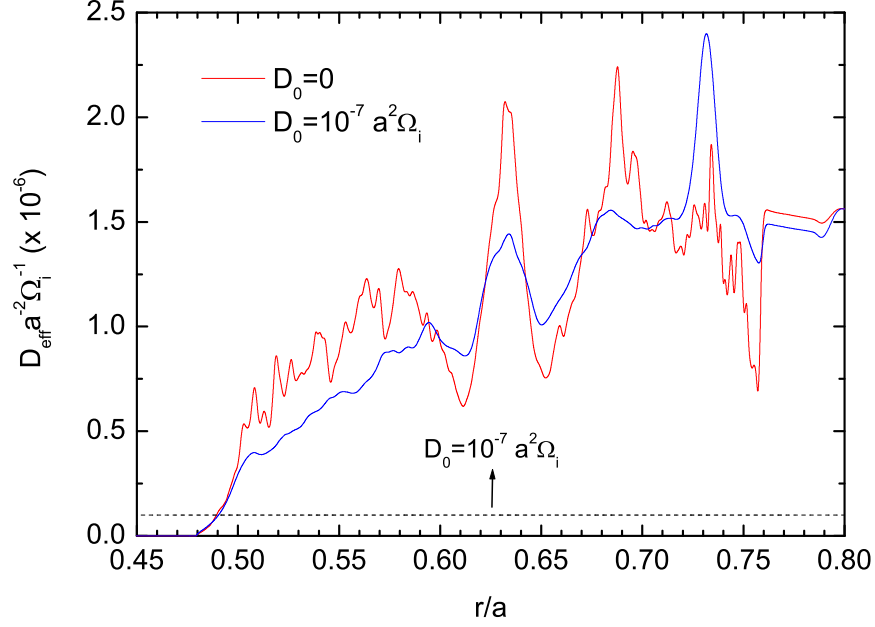


Figura 5.18: Dependencia radial de la difusividad efectiva, D_{tur} , sin difusividad y con alta difusividad.

al difusivo puesto que es el que más transporte acarrea. Sin embargo, cuando la difusividad sobre el perfil adquiere el valor D_0^{crit} , el sistema adquiere una dinámica puramente difusiva. Numéricamente, tenemos que los promedios de la difusividad efectiva son un orden de magnitud mayores que D_0^{crit} . Los tiempos de confinamiento asociados en ambos casos son $\tau_c \sim 7.2 \times 10^4 \Omega_i^{-1} \sim 1500 \Delta t$. ¿Cómo es posible que en dos casos tan dispares obtengamos tiempos de confinamiento tan parecidos?. La respuesta es que los valores de D_{tur} calculados de acuerdo a la Ec. (5.12) están sesgados en los casos $D_0 \neq 0$. Para entenderlo, hay que recordar que durante la evolución, el perfil se mantiene congelado en el intervalo $r < r_{\text{in}}$ y $r > r_{\text{ex}}$ (sección 5.9.1) y como ya se vio, esto es equivalente a introducir una fuente sobre el perfil para evitar las pérdidas que hacían que el perfil se fuera aplanando en la zona interior. Por otro lado, según nuestro cálculo para estimar D_{tur} , la única fuente que contribuye es \tilde{S} mientras que en realidad deberíamos utilizar una fuente efectiva, $S_{\text{tur}} = \tilde{S} + S_c$, suma de la que ya tenemos más la contribución que surge de mantener el perfil congelado. Otra forma de verlo es que si no mantuviéramos el perfil congelado en el citado intervalo, el denominador en la Ec. (5.12) se haría más pequeño y por tanto la difusividad efectiva aumentaría. El resultado final es que en los casos con $D_0 \neq 0$, los valores obtenidos en el cálculo de D_{tur} y por consiguiente en los tiempos de confinamiento están sesgados a la baja en las difusividades efectivas y al alza en los tiempos de confinamiento. Hay que notar que para $D_0 = 0$ todo sucede dentro del intervalo $r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$. Fuera, el perfil no

evoluciona, es decir, $S_c = 0$ y por tanto no hay sesgo en el cálculo. En el capítulo siguiente se estimarán nuevamente los tiempos de confinamiento utilizando un método diferente y veremos cómo adquieren dependencia con D_0 .

5.10.5. Interpretación

A continuación trataremos de unificar todos los resultados vistos en las tres secciones anteriores para formar una visión global y coherente. La principal conclusión que se puede extraer es que la existencia de una difusión finita sobre el perfil no elimina las características típicas de los sistemas SOC que nuestro modelo presenta cuando $D_0 = 0$. Hemos comprobado que fenómenos tales como avalanchas, memoria y autosimilaridad pueden ser detectados para difusividades finitas, siempre y cuando $D_0 < D_0^{\text{crit}}$ (Fig. 5.12). La estructura de las avalanchas cambia con la difusión, implicando en este caso sucesos más frecuentes pero de menores dimensiones [Fig. 5.17(b)]. Para el caso límite $D_0 = D_0^{\text{crit}}$, el comportamiento comienza a ser puramente difusivo. La autosimilaridad se pierde y las avalanchas prácticamente desaparecen.

Los efectos de memoria persisten en el sistema incluso para valores altos de la difusividad, si bien a medida que D_0 aumenta, tales fenómenos disminuyen debido al efecto “erosionador” de la difusión, “borrando” parte de la memoria que se acumulaba sobre el perfil por medio de pequeñas inhomogeneidades cuando no existía difusividad.

Los efectos de autosimilaridad también se manifiestan analizando los espectros de potencia. Así, encontramos que para bajas difusividades existe una amplia zona temporal (aproximadamente dos décadas) caracterizada por tener un decaimiento algebraico, con exponente $\alpha \simeq 1$, lo que se ha asociado tradicionalmente a dinámicas tipo SOC, pero lo más notable es que para difusividades finitas esa región persiste, con exponente α menor que la unidad [Fig. 5.17(a)]. Esto no quiere decir que para difusividades finitas la dinámica del sistema deje de ser SOC (cuando $0 < D_0 < D_0^{\text{crit}}$ siempre se obtiene $H > 0.5$ en el análisis R/S) ya que, como se ha demostrado en otros sistemas como el sandpile [61], la no existencia de una región con decaimiento algebraico $1/f$ no implica carencia de dinámica tipo SOC. Basta con que existan leyes de potencia con exponentes α comprendidos en el intervalo $0 < \alpha < 1$.

Es importante resaltar el dominio relativo del canal turbulento frente al difusivo en todos los casos, incluso cuando $D_0 \geq 10^{-7} a^2 \Omega_i$. A partir de ese valor, la dinámica deja de ser SOC y pasa a ser puramente difusiva, pero el canal de transporte dominante sigue siendo el turbulento.

Finalmente se harán una serie de consideraciones en lo concerniente a los límites de validez de los resultados y a la relevancia o aplicabilidad de éstos bajo las condiciones de un plasma real que pueda estar contenido en un dispositivo de fusión como un tokamak. Se puede decir que a pesar de que el modelo es extremadamente

simple, los valores utilizados para las difusividades no quedan tan lejos de los que se encuentran experimentalmente. El valor máximo utilizado en nuestros cálculos para la difusividad, $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, equivale, para un plasma de $B_0 = 1 \text{ T}$ y $a = 0.25 \text{ m}$ a $D_0 \sim 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$. Es decir, $D_{\text{tur}} \sim 0.5 \text{ m}^2/\text{s}$, que es un valor no muy lejano a los que se encuentran en medidas experimentales. Además, D_{tur} es mucho mayor que la difusividad banana neoclásica de partículas, que para un plasma de $T_e = 100 \text{ eV}$ y $n_e = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ tiene un valor $D_{\text{neo}} \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ (donde se ha utilizado $q \sim 1.5$ y $\varepsilon \sim 0.25$).

Capítulo 6

Difusión fraccionaria: un modelo de transporte para plasmas de fusión

En el capítulo anterior discutimos el paradigma de la Criticalidad Auto-Organizada y su posible papel en el entendimiento del transporte turbulento radial en plasmas de fusión, así como su grado de robustez en presencia de un canal difusivo subdominante. Dicho modelo [50, 51, 54] fue introducido como respuesta a una serie de resultados experimentales que están en contradicción con una descripción puramente difusiva. Tales resultados incluían el escalado de los tiempos de confinamiento con el tamaño de las máquinas en modo L, fenómenos con alta velocidad de propagación, propagación no local o la existencia de correlaciones en escalas temporales grandes del nivel de fluctuaciones.

De ser cierto el hecho de que el transporte radial en estos plasmas carece de escalas espacio-temporales características, no sería posible su descripción en el marco difusivo tradicional basado en la ley de Fick. Así, el paradigma difusivo falla a la hora de contrastar los resultados experimentales con las predicciones teóricas ya que por definición describe procesos locales, Gaussianos y sin correlaciones a largos tiempos. De acuerdo a la ley de Fick, los flujos, que contienen la información dinámica de los procesos de transporte, dependen del valor local de las cantidades, esto es, de los gradientes de los campos. Por otro lado la hipótesis Markoviana, que supone que los efectos de memoria son despreciables en el proceso de transporte, implican localidad temporal (en el apéndice A se describen brevemente los procesos Gaussianos y de Markov). A nivel microscópico, los procesos difusivos asumen la existencia de un proceso estocástico gaussiano decorrelacionado, como puede ser un random walk. Para evitar esta serie de restricciones que imponen los procesos difusivos es necesario desarrollar modelos que vayan más allá y así poder dar una descripción más adecuada del transporte.

Existen muchos mecanismos que pueden generar difusión anómala en un plas-

ma. La existencia de estructuras coherentes, procesos tipo avalancha, streamers¹, etc, pueden cambiar de forma significativa el carácter del transporte.

En este capítulo se describe la aplicación de dos formalismos matemáticos capaces de modelar los mecanismos de transporte carentes de escalas características ya vistos en el capítulo anterior, con el objetivo de caracterizar las propiedades tipo SOC del transporte generado por turbulencia DTEM y su modificación en presencia de difusión colisional. Se trata, en concreto, de los *Continuous Time Random Walk* (CTRW) y las ecuaciones de transporte fraccionario. Para construir tales modelos se necesita determinar una serie de exponentes, que generalmente serán fraccionarios debido al carácter no local y no Markoviano del transporte. Además, la medición de estos exponentes sirve como diagnóstico de las propiedades no difusivas presentes en el mismo.

El capítulo se organiza como sigue: en primer lugar se hará una pequeña introducción de los CTRWs y de las ecuaciones de transporte fraccionarias. A continuación se describirá cómo es posible determinar, a partir de las simulaciones, los exponentes necesarios para completar los modelos. Para ello se analizarán las trayectorias descritas por partículas test (tracers) bajo la influencia del campo de velocidades turbulento. Finalmente, discutiremos la relación de estos resultados con los descritos en el capítulo anterior.

6.1. Difusión anómala

Desde los primeros desarrollos teóricos, los modelos difusivos han jugado un papel muy importante en la descripción del transporte del plasma. Estos modelos tienen la forma genérica,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial n}{\partial x} \right] + S(x, t), \quad (6.1)$$

donde S es una fuente, n es la densidad y por simplicidad se plantea la ecuación en una dimensión (x podría representar la coordenada radial por ejemplo). Bajo esta aproximación, el problema se limita a modelar la difusividad D , que en general dependerá de x y t . En el caso de modelos no lineales, D también dependerá de n . Tradicionalmente, los coeficientes de transporte eran estimados teóricamente mediante esquemas de renormalización [64, 65], o simulaciones numéricas [66, 67]. Después se integraban en ecuaciones de difusión para la densidad, momento o energía (según el caso) y se contrastaban con los valores obtenidos experimentalmente [68, 69]. Sin embargo, la validez del paradigma difusivo requiere la existencia de escalas espacio-temporales bien definidas [70, 71], lo que parece estar en contradicción con los resultados experimentales [72–79].

¹Los streamers son estructuras localizadas poloidalmente y elongadas según la dirección radial. Debido a esto, causan un grave deterioro en el confinamiento ya que pueden conectar intervalos radiales de tamaños próximos al radio menor del dispositivo.

6.1.1. El Continuous Time Random Walk

El modelo de difusión estándar (6.1) está relacionado con el modelo random walk browniano [80]. Esta conexión da una visión sencilla del significado físico de la ecuación de difusión. Un random walk describe la dinámica de partículas que experimentan desplazamientos aleatorios en intervalos regulares de tiempo. Los desplazamientos son variables aleatorias tomadas de una función densidad de probabilidad. Hay dos suposiciones básicas en un random walk: los saltos están decorrelacionados y la densidad de probabilidad de los desplazamientos tiene varianza finita. Físicamente, esto último significa que existe una escala espacial bien definida, por lo que la probabilidad de dar grandes saltos es muy pequeña. Como los pasos se realizan a intervalos regulares de tiempo, también existe una escala temporal característica. La ecuación de transporte apropiada en estos casos es la ecuación de difusión, pues se trata de un proceso sin memoria y sin correlaciones espaciales.

El Continuous Time Random Walk, propuesto por Montroll y Weiss [81], es una generalización del random walk estándar. En su forma más simple (separable), describe el movimiento de un número arbitrario de partículas, cada una de las cuales espera en su posición \mathbf{r}' durante un lapso de tiempo² Δt hasta que realiza un salto o paso de magnitud $\Delta \mathbf{r}$, moviéndose a $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{r}$. Después de llegar a la nueva posición, esperará durante otro lapso de tiempo, repitiéndose el proceso indefinidamente. Las cantidades Δt y $\Delta \mathbf{r}$ se toman de funciones densidad de probabilidad, $\psi(\Delta t)$ y $p(\Delta \mathbf{r})$, que contienen toda la información dinámica del sistema. La clave para describir correctamente dicha dinámica será por tanto el hacer una correcta elección de ambas PDFs. Una vez conocidas las PDFs, la evolución temporal de la densidad de partículas $n(\mathbf{r}, t)$ se describe mediante una *ecuación maestra generalizada*³,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int_0^t dt' \phi(t - t') \left[\int d\mathbf{r}' p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t') - n(\mathbf{r}, t') \right], \quad (6.2)$$

que establece la conservación de la cantidad total de partículas [82]. El primer término entre corchetes representa la cantidad de partículas que se mueven de \mathbf{r}' a \mathbf{r} . El segundo término representa la cantidad de partículas que dejan la posición \mathbf{r} . La suma de ambas contribuciones da el ritmo local de cambio de la cantidad de partículas (en este caso de la densidad). La función ϕ es la llamada *función de memoria* y su transformada de Laplace está relacionada con la PDF de los tiempos de espera: $\phi(s) = s\psi(s)/(1 - \psi(s))$.

Si los saltos se producen de manera decorrelacionada, es decir, si el proceso no tiene memoria, la función generadora de los tiempos de espera deberá obedecer a

²A estos lapsos temporales se les denomina *waiting times*. En castellano, *tiempos de espera*.

³En inglés, *Generalized Master Equation* (GME).

un proceso de Poisson, $\psi(\Delta t) = \tau_0^{-1} \exp(-\Delta t/\tau_0)$, siendo τ_0 el tiempo de espera medio. En ese caso, la función de memoria queda $\phi(t) = \tau_0^{-1} \delta(t)$ y la ecuación maestra generalizada se convierte en una GME Markoviana,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0} \left[\int d\mathbf{r}' p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t') - n(\mathbf{r}, t') \right], \quad (6.3)$$

donde ahora la historia pasada no interviene al haber desaparecido la integral temporal.

Supongamos ahora que, además de tener una PDF exponencial para los tiempos de espera (distribución de Poisson), la PDF correspondiente a los saltos es Gaussiana, $p(\Delta \mathbf{r}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-|\Delta \mathbf{r}|^2/2\sigma^2)$. En ese caso, a partir de la GME correspondiente (6.3), haciendo un desarrollo en serie de Taylor alrededor de \mathbf{r} y manteniendo los términos de orden más bajo se recupera la ecuación de difusión clásica,

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\mathbf{r}, t), \quad D = \sigma^2/\tau_0, \quad (6.4)$$

donde la difusividad D se expresa como el cociente entre el desplazamiento cuadrático medio, σ^2 y el tiempo de espera medio, τ_0 . σ es por tanto el tamaño medio de los saltos que realizan las partículas.

El poder del formalismo CTRW recae en el hecho de que las PDFs no tienen por qué ser exponenciales o Gaussianas como en el caso particular anterior, pudiéndose modelar procesos cuya dinámica sea no local y con memoria.

Desde el punto de vista de la difusión clásica, el escalado del desplazamiento cuadrático medio de las partículas debe obedecer,

$$\langle |\Delta \mathbf{r}|^2 \rangle \sim t, \quad (6.5)$$

donde los paréntesis angulares representan el promedio sobre todas las partículas. Sin embargo, en muchos sistemas se encuentra que el escalado va como $t^{2\nu}$, siendo ν el exponente de transporte o índice de autosimilaridad, con $\nu \neq 1/2$ [83, 87]. Cuando $\nu < 1/2$ se dice que el proceso es subdifusivo, mientras que si $1/2 < \nu < 1$ el proceso será superdifusivo. El exponente ν es uno de los exponentes básicos a determinar en nuestro modelo.

Como ya se vio en el capítulo anterior, un ejemplo típico de sistema dinámico cuyo comportamiento no verifica la expresión (6.5) es el sandpile [50, 57], cuyas características de transporte son no locales, con efectos de memoria, y superdifusivas. La relevancia de este tipo de dinámicas en el caso de plasmas confinados magnéticamente se ha confirmado mediante simulaciones de turbulencia FD [47, 54, 59, 84] y mediante resultados experimentales en diferentes tokamaks [52, 76, 78, 79, 85]. Por todo esto, es necesario ir más allá del paradigma difusivo y encontrar nuevos modelos que incluyan efectos no locales y con memoria, como es el caso de los CTRWs.

6.1.2. Límite fluido del CTRW: Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

En el límite fluido, los detalles del CTRW que son irrelevantes en escalas temporales o espaciales suficientemente grandes no son tenidos en cuenta. Equivalentemente, la ecuación que se obtiene en el límite fluido reflejará las propiedades características del transporte del CTRW en el límite de grandes distancias y largos tiempos. Formalmente, esto se hace en el límite de un sistema infinito. Así, el límite de grandes distancias es equivalente a tomar $k \rightarrow 0$ en el espacio de Fourier. Análogamente, el límite de largos tiempos se lleva a cabo haciendo, en el espacio de Laplace, $s \rightarrow 0$. La transformada de Fourier-Laplace de la ecuación maestra generalizada (6.3) queda,

$$sn(k, s) - n(k, 0) = \phi(s) (p(k) - 1) n(k, s), \quad (6.6)$$

donde se ha aplicado el teorema de la convolución y la definición de transformada de Laplace de la derivada. Resolviendo (6.6) se obtiene la transformada de Fourier-Laplace de la densidad,

$$n(k, s) = \frac{n(k, 0)}{s - \phi(s) (p(k) - 1)} = \frac{n_0(k) (1 - \psi(s))}{s (1 - \psi(s) p(k))}, \quad (6.7)$$

donde la función de memoria ψ se ha escrito en términos de la transformada de Laplace de la PDF de los tiempos de espera. $n_0(k)$ es la transformada de Fourier de la densidad inicial. A la expresión (6.7) se le llama ecuación de Montroll-Weiss [81].

Podemos tomar el límite fluido haciendo $k \rightarrow 0$ y $s \rightarrow 0$ en la ecuación de Montroll-Weiss [o en la Ec. (6.6)]. Para ello, asumiremos que las funciones p y ψ son de la familia de Lévy (ver Apéndice B). Recurrirnos a este tipo de funciones puesto que la familia de distribuciones de Lévy estables satisfacen una versión general del teorema central del límite que no requiere decaimiento exponencial para valores altos del argumento [90, 91].

En el límite $k \rightarrow 0$ se tiene,

$$p(k) = P_{\alpha, 0, \sigma}(k) \simeq 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha. \quad (6.8)$$

Análogamente, la transformada de Laplace de las PDFs de Lévy extremas positivas [Ec. (B.6)] se escribe, en el límite $s \rightarrow 0$,

$$\psi(s) = P_{\beta, 1, \tau_0} \simeq 1 - A_\beta^{-1} \tau_0^\beta s^\beta, \quad (6.9)$$

donde queda incluida la exponencial si $\beta = 1$ y,

$$A_\beta = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right), & \beta < 1 \\ 1, & \beta = 1 \end{cases}. \quad (6.10)$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para p y ψ [Ecs. (6.8) y (6.9)] en (6.6), se obtiene el límite fluido para la ecuación de Montroll-Weiss,

$$n(k, s) \simeq n_0(k) [s + D_{[\alpha, \beta]} s^{1-\beta} |k|^\alpha]^{-1}, \quad (6.11)$$

donde se ha definido el coeficiente $D_{[\alpha, \beta]} = A_\beta \sigma^\alpha / \tau^\beta$. La Ec. (6.11) se puede reescribir de la siguiente manera,

$$sn(k, s) - n_0(k) = -D_{[\alpha, \beta]} s^{1-\beta} |k|^\alpha n(s, k). \quad (6.12)$$

Utilicemos a continuación las propiedades de los operadores fraccionarios respecto a la transformada de Fourier (ver Apéndice C). Mediante la expresión (C.5) podemos calcular la transformada inversa de Fourier de (6.12), dando como resultado la siguiente ecuación diferencial fraccionaria en el espacio real,

$$sn(s, x) - n_0(x) = D_{[\alpha, \beta]} s^{1-\beta} \frac{\partial^\alpha n}{\partial |x|^\alpha}. \quad (6.13)$$

Sólo queda realizar la transformada inversa de Laplace de (6.13). Para ello, multiplicaremos ambos miembros por $s^{\beta-1}$ y utilizaremos las propiedades del operador diferencial fraccionario de Caputo (C.7) respecto a la transformada de Laplace (C.8) para obtener la siguiente ecuación diferencial fraccionaria⁴ en el espacio y en el tiempo,

$$\frac{\partial_c^\beta n}{\partial t_c^\beta} = D_{[\alpha, \beta]} \frac{\partial^\alpha n}{\partial |x|^\alpha}. \quad (6.14)$$

Se llega a la conclusión de que utilizar una FDE como la dada por (6.14) con exponentes α , β y una difusividad fraccionaria efectiva $D_{[\alpha, \beta]}$ es equivalente, en el límite fluido, a utilizar un CTRW con $p = P_{\alpha, 0, \sigma}(\Delta x)$ y $\psi = P_{\beta, 1, \tau_0}(\Delta t)$ [83, 86–88]. La ventaja que presentan las FDEs es que muchas de sus propiedades son conocidas analíticamente, como por ejemplo sus propagadores [83]. El propagador $G(r, t)$ (r es la coordenada espacial y t el tiempo) no es más que la evolución temporal de una condición inicial dada por una función $\delta(r - r')$. Es decir, proporciona la distribución de probabilidad de encontrar a una partícula, inicialmente en r' , en el punto r en el instante t . Este hecho es de gran importancia en aplicaciones numéricas, puesto que es posible calcular el propagador directamente durante la simulación.

El modelo (6.14) se basa en el uso de operadores diferenciales fraccionarios, que son generalizaciones de las derivadas naturales. Las derivadas fraccionarias son operadores integro-diferenciales, muy útiles para modelar efectos de no-localidad en el transporte. A diferencia de la ecuación puramente difusiva (6.1), los índices α y β ya no tienen por qué valer 2 y 1 respectivamente. De hecho, en diferentes

⁴Para designarlas se suele utilizar las siglas FDE (Fractional Differential Equation).

simulaciones se encuentra que $\beta < 1$, $\alpha < 2$ y $2\beta > \alpha$ como valores típicos en los regímenes de interés de un plasma de fusión. Este comportamiento se observa para escalas espaciales y temporales que van desde unas pocas veces las mínimas posibles impuestas por la resolución de la simulación hasta las máximas dadas por el tamaño del sistema y la duración total.

En la Fig. 6.1 se muestran los diferentes regímenes de transporte en función de los valores numéricos de los índices α y β . La ecuación difusiva está represen-

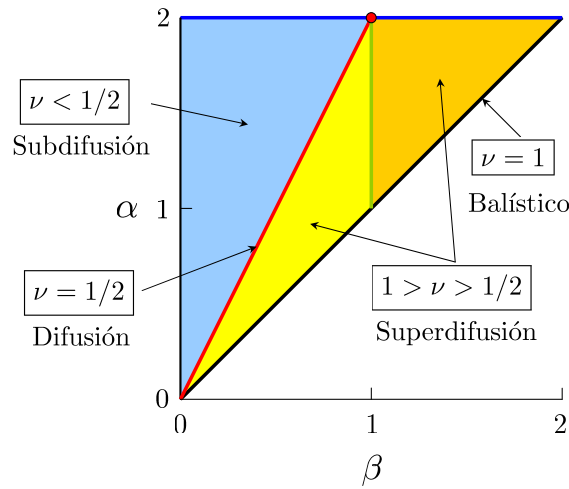


Figura 6.1: Espacio paramétrico $\alpha - \beta$ para la Ec. (6.14).

tada por el punto rojo, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. La línea azul, $\alpha = 2$, representa procesos gaussianos. En esos casos, si $\beta < 1$, tendremos subdifusión, mientras que si $\beta > 1$ tendremos superdifusión. De la misma manera, la línea verde, $\beta = 1$, representa procesos Markovianos. En tales casos, si $\alpha = 2$ se recupera la ecuación de difusión, mientras que si $\alpha < 2$ tendremos superdifusión. La línea roja representa procesos que verifican $\nu = \beta/\alpha = 1/2$, caracterizados porque los desplazamientos promedio escalan con el tiempo de la misma forma que los procesos puramente difusivos, a pesar de que los índices α y β puedan tomar cualquier valor, siempre que se verifique la condición anterior. La línea negra, $\alpha = \beta \implies \nu = 1$, representa los procesos caracterizados por tener propagación balística. La zona azul representa procesos subdifusivos y las zonas amarilla y oro los superdifusivos, siendo la línea verde, dentro de estos últimos, la frontera entre los que presentan $\beta < 1$ o $\beta > 1$.

Las FDEs con $\alpha \neq 2$ y $\beta \neq 1$ son no gaussianas y no markovianas. Una característica muy interesante es que el promedio de los diferentes momentos de los desplazamientos verifica,

$$\langle |\Delta r|^n \rangle \sim t^{n\nu(n)}, \quad (6.15)$$

siendo ν el exponente de transporte, $\nu = \beta/\alpha$. Esta ecuación es similar a la que se obtiene para el caso difusivo [Ec. (6.5)]. La diferencia está en que ahora el escalado

con el tiempo tiene una dependencia en ν que para el caso difusivo no aparece puesto que allí $\nu = 1/2$.

6.2. Obtención de las trayectorias

Tanto los CTRWs como las FDEs describen el movimiento de partículas en base a dos exponentes: α (espacial) y β (temporal), que dan lugar al exponente de transporte $\nu = \beta/\alpha$. Puesto que ambos exponentes se refieren al movimiento de partículas, su determinación requiere el seguimiento de las trayectorias efectuadas por las partículas individuales arrastradas por la turbulencia. Se las conoce como partículas test o tracers.

Supondremos que según la dirección perpendicular al campo magnético confinante \mathbf{B} , los tracers se moverán bajo la influencia del flujo turbulento, $\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$, más la deriva diamagnética, $\mathbf{V}_{*n} = c_s \rho_s / L_n$, que hace rotar al plasma según la dirección poloidal. No consideraremos la fuerza de Lorentz y simplemente seguiremos la trayectoria del centro de guía de las partículas. En cuanto a la componente paralela de la velocidad, $V_{||}$, supondremos que las partículas son libres debido a la simetría de equilibrio que tienen los dispositivos como el tokamak y por lo tanto se mantendrá constante.

Las trayectorias son solución de la ecuación del movimiento,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_{\perp} + V_{||}\mathbf{b}, \quad (6.16)$$

donde $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} + \mathbf{V}_{*n}$. Dado que nuestro modelo es electrostático, toda la información sobre la evolución turbulenta está contenida en el potencial $\tilde{\phi}$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = -\nabla \tilde{\phi} \times \mathbf{b}/B. \quad (6.17)$$

A partir de (6.17) se obtienen las componentes radial y poloidal de la velocidad,

$$\begin{aligned} V_r &= -\nabla_{\theta} \phi \times \mathbf{b}/B \\ V_{\theta} &= \nabla_r \phi \times \mathbf{b}/B. \end{aligned} \quad (6.18)$$

El código utilizado en la resolución de la turbulencia obtiene la solución para la densidad fluctuante normalizada, $\hat{n} = \tilde{n}/n_0$, que está relacionada con el nivel de fluctuaciones electrostático, $\tilde{\phi}$, a través de la ecuación de Boltzmann modificada ya vista en el capítulo 2. Su expresión en forma adimensional es,

$$\hat{\phi} = (1 + i\delta) \hat{n}, \quad (6.19)$$

donde $\hat{\phi} = e\tilde{\phi}/T_0$, $\delta = \alpha\sqrt{\varepsilon}V_{*T}k_{\theta}/\nu_{\text{eff}}$ y $\hat{n} = \tilde{n}/n_0$.

6.2.1. Inicialización del cálculo

Las posiciones de las partículas son inicializadas de forma aleatoria dentro del intervalo en el que existe campo turbulento (superficies racionales). Así, la distribución de las posiciones iniciales según las tres coordenadas es aleatoria en los intervalos: $r_0 \in [0.50, 0.73]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ y $z_0 \in [0, L]$ ($\zeta_0 \in [0, 2\pi]$). Fuera de ellos las trayectorias ya no obedecen a la ecuación del movimiento dada por (6.16). En cuanto a las velocidades iniciales, son múltiples las posibles elecciones, pero en general elegiremos: $V_{\perp 0} = 0$ y $V_{\parallel 0} = V_{\parallel}$.

6.3. Escalas espacio-temporales

Centraremos el estudio en el régimen de la mesoescala. Los fenómenos que podemos incluir en este intervalo tienen escalas temporales comprendidas entre las mínimas dadas por el tiempo de decorrelación de la turbulencia hasta las máximas impuestas por el tiempo de confinamiento de las partículas. Espacialmente, la mesoescala abarca tamaños que van desde los mínimos impuestos por la coherencia o longitud de decorrelación espacial de la turbulencia, hasta los máximos dados por el tamaño del sistema. En la Fig. 6.2 se muestra esquemáticamente el rango que abarca el citado régimen.

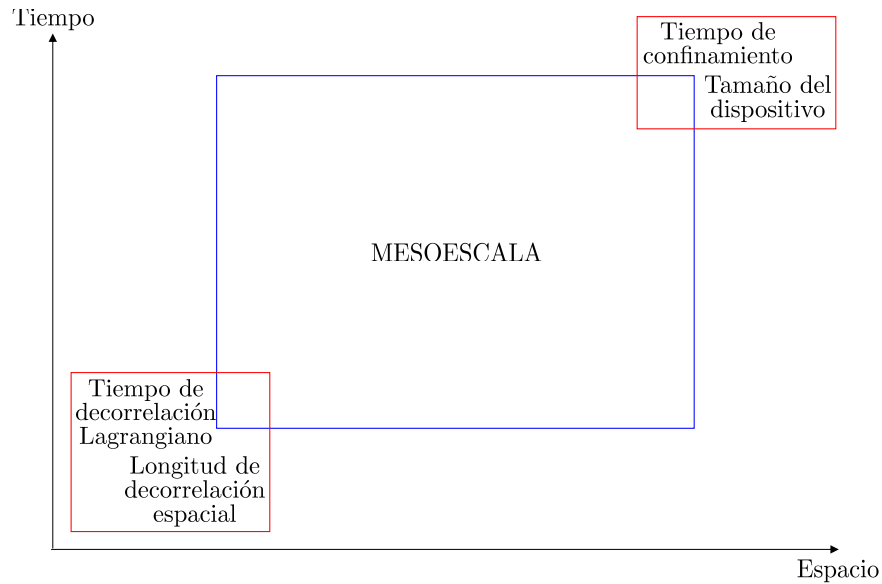


Figura 6.2: Mesoescala.

Es conveniente que la magnitud de la mesoescala sea lo más grande posible, sobre todo en estudios como el que se realiza en este trabajo en los que la autosimilitud juega un papel importante. Cuando esto sucede, las funciones distribución

de la probabilidad de diferentes cantidades (por ejemplo de las velocidades Lagrangianas de las partículas), decaen algebraicamente en las colas y para poder analizar ese decaimiento es necesario tener suficiente estadística, ya sea en longitudes o en tiempos. Cuando llegamos a los límites de la mesoescala la autosimilaridad desaparece puesto que el modelo de turbulencia utilizado sólo tiene validez en ese rango y las funciones de distribución sufren distorsiones. Como veremos en las siguientes secciones, en nuestro caso la mesoescala cubre apenas una década en su componente espacial, mientras que en la componente temporal existe un factor de entre 50 y 400, según la difusividad. Sería deseable al menos dos décadas en la componente espacial, pero con los parámetros utilizados en este trabajo eso no es posible.

6.3.1. Escalas espaciales

Una vez llegado el estado estacionario, los eddies se distribuyen espacialmente quedando anclados a las superficies racionales [Fig. 6.3(a)]. En las Figs. 6.3(b)–(c) se muestran en detalle dos secciones perpendiculares al eje del cilindro, en el plano $Z = L/2$. A medida que la difusividad aumenta sobre el perfil, el nivel de fluctuaciones también lo hace. Por otro lado, las estructuras tienen mayores dimensiones y el transporte asociado a ellas será consecuentemente mayor. En ambos casos la turbulencia es homogénea y anisótropa, tal como predice la ecuación para las fluctuaciones.

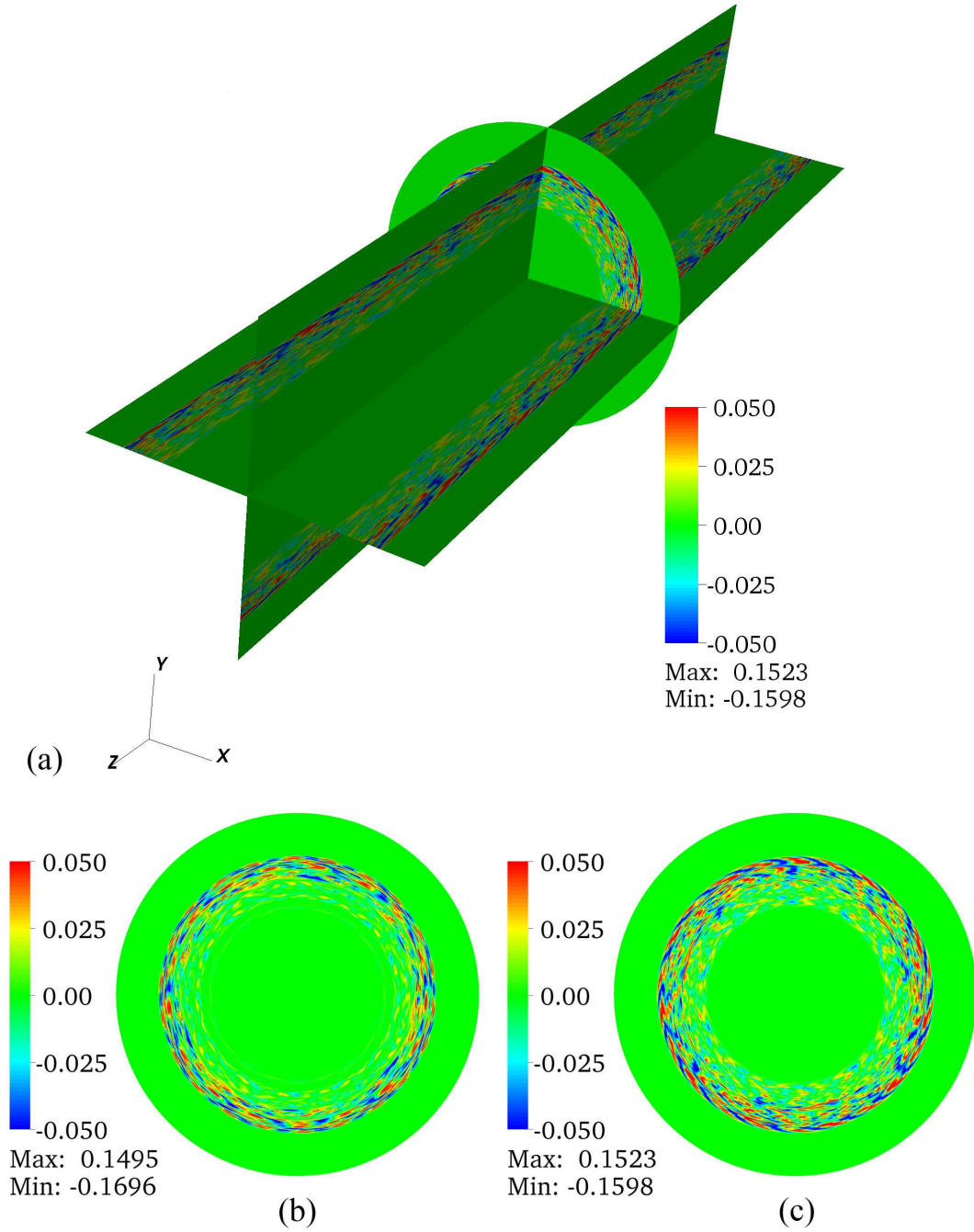


Figura 6.3: (a) Proyección según las tres direcciones del cilindro (planos $X = 0$, $Y = 0$ y $Z = 0$) de los contornos de densidad fluctuante. (b)–(c) Proyección sobre el plano $Z = 0$ de los contornos de densidad fluctuante con $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$ respectivamente.

Longitud de decorrelación radial

Para cuantificar el tamaño típico de las estructuras se define la función de correlación radial,

$$C(r - r') = \langle \tilde{n}(r, \theta, \zeta) \tilde{n}(r', \theta, \zeta) \rangle. \quad (6.20)$$

Se obtiene a través de las distribuciones radiales del nivel de fluctuaciones en diferentes posiciones angulares. Los paréntesis angulares representan el promedio estadístico sobre las realizaciones de $\tilde{n}(r, \theta, \zeta)$. En la Fig. 6.4(a) se muestran dichas distribuciones para el caso $D_0 = 0$. La coherencia o longitud de decorrelación radial de la turbulencia, ρ_d , tiene un valor de $\sim 0.01 - 0.02$ a [Fig. 6.4(b)] y aumenta ligeramente con D_0 . En el caso altamente difusivo ($D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$) se encuentra que $\rho_d \sim 0.03 - 0.05$ a.

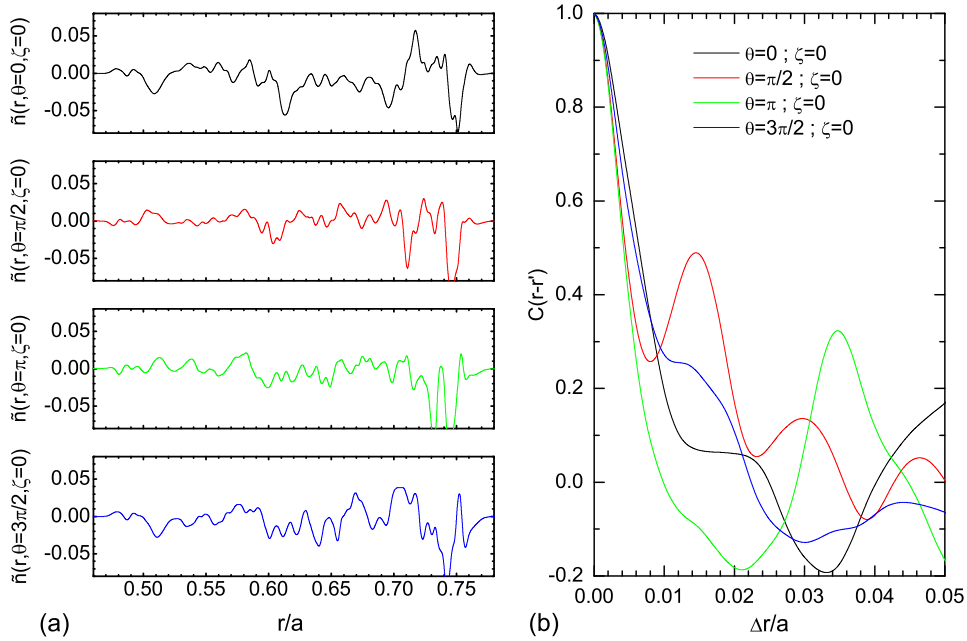


Figura 6.4: (a) Distribuciones radiales del nivel de fluctuaciones de densidad (caso $D_0 = 0$) en el plano $\zeta = 0$ para las posiciones poloidales $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$ respectivamente. (b) Funciones de autocorrelación radial para las cuatro señales en (a).

6.3.2. Escalas temporales

Las escalas temporales relevantes en el cálculo vienen dadas en la tabla 6.1.

| Escala temporal (Δt) | $D_0 = 0$ | $D_0 = 10^{-7}$ |
|-------------------------------------|-----------|-----------------|
| Tiempo de decorrelación Lagrangiano | 5 | 10 |
| Tiempo de decorrelación Euleriano | 50 | 100 |
| Tiempo de confinamiento | 2200 | 500 |
| Tiempo de simulación | 10^4 | 10^4 |

Tabla 6.1: Escalas temporales básicas.

Tiempo de decorrelación Euleriano

La función de correlación Euleriana,

$$C_E(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (6.21)$$

se define por medio de las series temporales de las velocidades Eulerianas, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, cuyas señales se obtienen tomando los valores del campo de velocidades en diferentes puntos \mathbf{r} y tiempos t . Los paréntesis angulares representan el promedio estadístico sobre las realizaciones de $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

A partir de 6.21 se define la función de correlación Euleriana a distancia nula,

$$C_E(t - t') = \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t') \rangle. \quad (6.22)$$

Hay que notar que $C_E(t - t')$ se puede calcular para cualquier componente de la velocidad, en particular para las componentes radial y poloidal.

En la Fig. 6.5 se muestran las velocidades Eulerianas. Las zonas ampliadas muestran que la resolución temporal de las señales es apropiada. Se han generado 64 series en diferentes posiciones dentro del plasma elegidas al azar. El promedio de las señales Eulerianas es siempre nulo para cualquier valor de D_0 y los valores cuadráticos medios típicos vienen dados en la tabla 6.2.

| | $D_0 = 0$ | $D_0 = 10^{-7}$ |
|--|----------------------|----------------------|
| $\langle V_r^2 \rangle^{1/2} / a\Omega_i$ | 2.5×10^{-5} | 3.7×10^{-5} |
| $\langle V_\theta^2 \rangle^{1/2} / a\Omega_i$ | 1.8×10^{-4} | 2.0×10^{-4} |

Tabla 6.2: Valores típicos promedio de la velocidad Euleriana.

En la Fig. 6.7(a) se muestran las funciones de autocorrelación Eulerianas de las series de velocidades radial y poloidal. Para alta difusividad las colas decaen más rápidamente. Los tiempos de decorrelación Eulerianos se sitúan en el intervalo $[50 - 100] \Delta t$. Hay que notar que el cálculo se hace sin tener en cuenta la rotación diamagnética del plasma en dirección poloidal, por lo que esta cantidad no es indicativa de la vida media de las estructuras turbulentas. Para ello, el cálculo de las series debe hacerse en posiciones fijas relativas al flujo medio, es decir, en posiciones que rotan con el fluido.

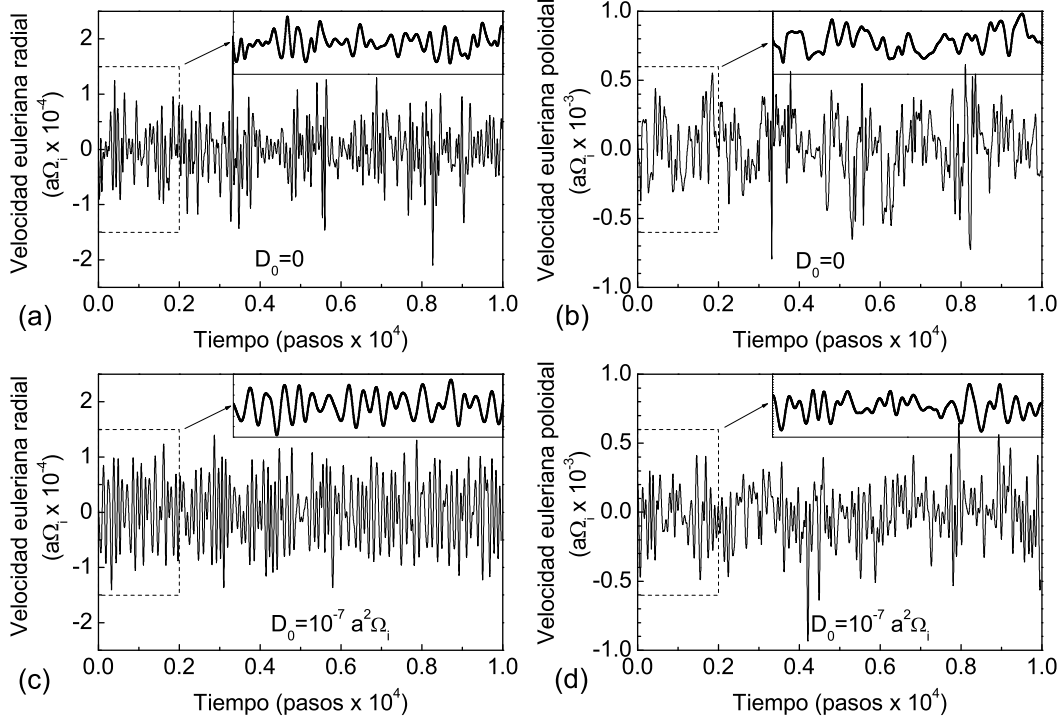


Figura 6.5: Velocidades Eulerianas. En (a) y (b) se muestran las componentes radial y poloidal en una misma posición con $D_0 = 0$. En (c) y (d) se muestran las componentes radial y poloidal en una misma posición con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$.

Tiempo de decorrelación Lagrangiano

La función de correlación Lagrangiana,

$$C_L(t - t') = \langle \mathbf{V}[\mathbf{r}(t), t] \mathbf{V}[\mathbf{r}', t'] \rangle, \quad (6.23)$$

se define por medio de la serie temporal de las velocidades Lagrangianas $\mathbf{V}[\mathbf{r}(t), t]$. Los paréntesis angulares representan el promedio estadístico sobre las partículas consideradas, con posición inicial \mathbf{r}' en el instante t' . La función $\mathbf{r}(t)$ representa la trayectoria de las partículas (Ec. 6.16), que se obtiene integrando la ecuación,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}[\mathbf{r}(t), t], \quad (6.24)$$

desde t' hasta t , con la condición inicial $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}'$.

En la Fig. 6.6 se muestran las series Lagrangianas. Las zonas ampliadas muestran peor resolución temporal que para las señales Eulerianas. Se han generado 64 series asignando las posiciones iniciales de forma aleatoria. El promedio de las señales Lagrangianas es siempre nulo para cualquier valor de D_0 y los valores cuadráticos medios típicos vienen dados en la tabla 6.3.

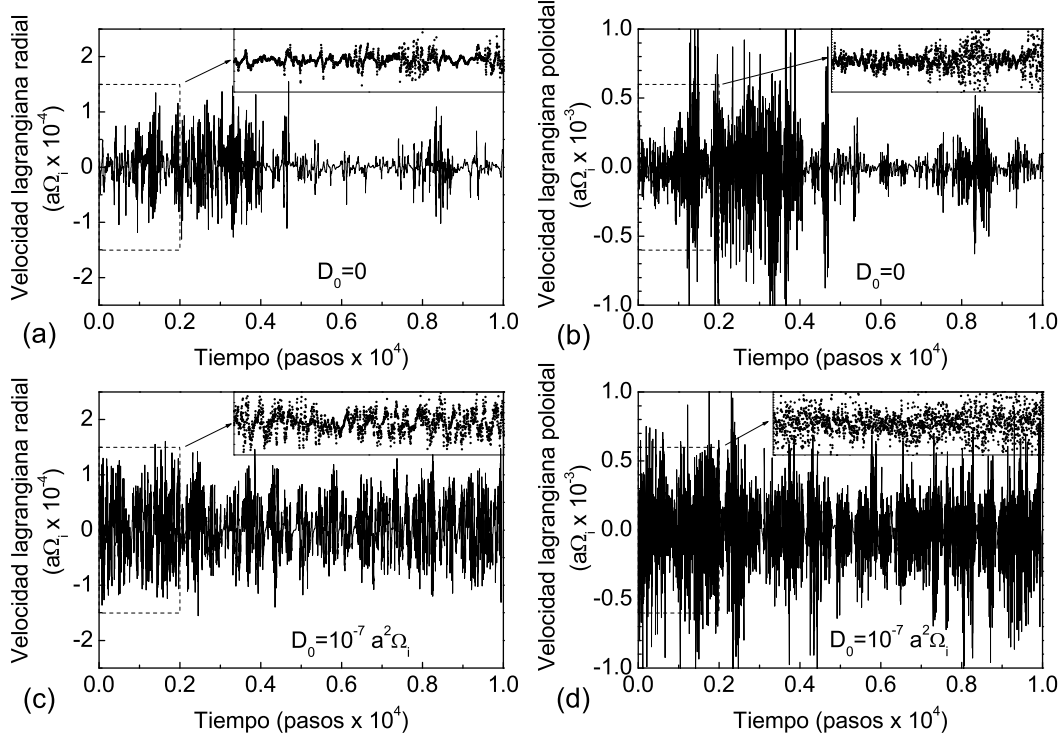


Figura 6.6: Velocidades Lagrangianas. En (a) y (b) se muestran las componentes radial y poloidal con $D_0 = 0$. En (c) y (d) se muestran las componentes radial y poloidal con $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$.

| | $D_0 = 0$ | $D_0 = 10^{-7}$ |
|--|----------------------|----------------------|
| $\langle V_r^2 \rangle^{1/2} / a\Omega_i$ | 2.0×10^{-5} | 3.8×10^{-5} |
| $\langle V_\theta^2 \rangle^{1/2} / a\Omega_i$ | 1.4×10^{-4} | 2.0×10^{-4} |

Tabla 6.3: Valores típicos promedio de la velocidad Lagrangiana.

En la Fig. 6.7(b) se muestran las funciones de autocorrelación Lagrangianas de las series de las velocidades radial y poloidal para dos valores de la difusividad D_0 . Debido a que ahora las señales se toman siguiendo la órbita de los tracers y no en puntos fijos, los tiempos de decorrelación Lagrangianos son menores que los Eulerianos, situándose en el intervalo $[5 - 10] \Delta t$, es decir, aproximadamente un orden de magnitud menores que los Eulerianos.

Tiempo de confinamiento

La evolución temporal de los tracers nos dará otra estimación del tiempo de confinamiento, además de la ya vista en el capítulo anterior. Para ello se construye la serie temporal $N_{\text{in}}(t)$, que lleva el recuento de la cantidad de tracers que perma-

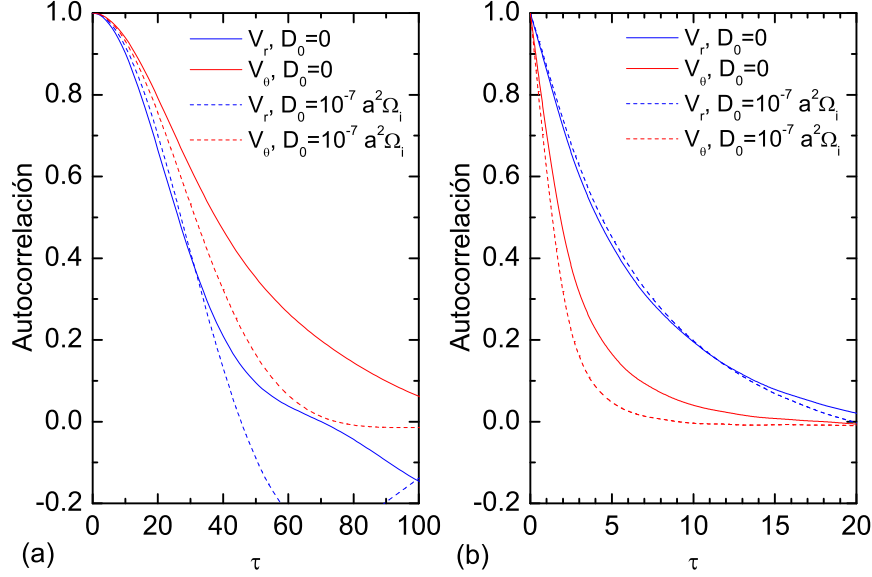


Figura 6.7: Funciones de autocorrelación promedio para las series de velocidades (a) Eulerianas y (b) Lagrangianas. En ambos casos están representadas las componentes radial y poloidal para $D_0 = 0$ y $D_0 = 10^{-7} a^2 \Omega_i$.

necen dentro del intervalo $r \in [0.48, 0.75]$ en el instante t . Comenzamos el cálculo con 10^5 tracers. En la Fig. 6.8 se muestran las series para diferentes valores de D_0 . El decaimiento es aproximadamente exponencial⁵,

$$N_{\text{in}}(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}, \quad (6.25)$$

y a medida que aumenta la difusividad el tiempo de confinamiento decrece. Las líneas discontinuas representan las rectas del ajuste lineal de las funciones N_{in} en los casos extremos. Así, para $D_0 = 0$, tenemos que el tiempo de confinamiento vale $\tau_c \simeq (\ln 10 \cdot 0.0002)^{-1} \simeq 2200 \Delta t$. Sin embargo, para las mayores difusividades, el tiempo de confinamiento disminuye hasta el valor $\tau_c \simeq (\ln 10 \cdot 0.00084)^{-1} \simeq 500 \Delta t$.

Existe acuerdo cualitativo entre estos resultados y los obtenidos en el capítulo anterior. El tiempo de confinamiento obtenido a partir de la difusividad efectiva, $\tau_c^D \simeq 1500 \Delta t$ es comparable al que ahora obtenemos para $D_0 = 0$. Además, con los tracers somos capaces de estimar el cambio en los tiempos de confinamiento a medida que varía el parámetro D_0 .

El tiempo de confinamiento es inversamente proporcional a la temperatura, siendo los valores obtenidos en este apartado los correspondientes a un plasma de $T_e = 100 \text{ eV}$.

⁵Definido de esta manera, τ_c representa el tiempo transcurrido hasta que la fracción de partículas que no escapan sea un factor $1/e$ de las que había inicialmente.

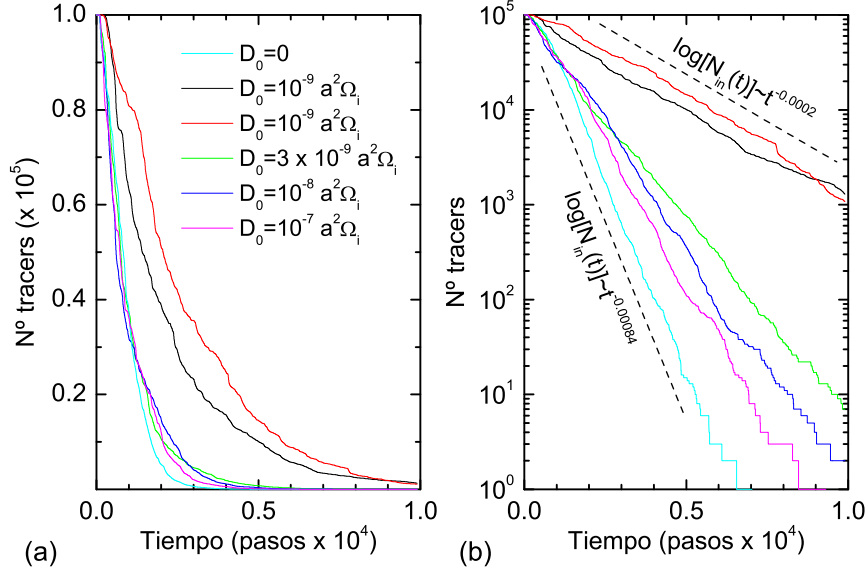


Figura 6.8: (a) Cantidad de tracers que permanecen dentro de los límites de integración en función del tiempo, $N_{in}(t)$, para diferentes valores de D_0 . (b) Idem, en escala semi-logarítmica.

6.4. Determinación numérica de los exponentes fraccionarios

La información obtenida de los tracers se puede interpretar utilizando el concepto de cinética fraccionaria ya visto en la sección 6.1.2. Las fluctuaciones del plasma (en nuestro caso de densidad) influyen el transporte de las partículas, de forma que en ocasiones circulan alrededor de las estructuras coherentes, pudiendo estar atrapadas durante tiempos muy largos, y en otras saltan de unas estructuras a otras⁶, pudiendo ser estos saltos de cualquier magnitud, dentro de la restricción impuesta por el tamaño del sistema. La combinación de ambos efectos, atrapamiento en los eddies y saltos entre ellos, genera un transporte caracterizado por la no-localidad espacial y temporal. Así, en el modelo están presentes las características básicas de la difusión anómala.

Hemos visto que los exponentes α y β son esenciales en la clasificación dinámica del transporte, así como en la construcción de un modelo de transporte efectivo. De igual manera, el exponente de transporte $\nu = \beta/\alpha$ juega un papel muy importante.

El exponente más sencillo de determinar es el exponente de transporte ν , que describe el escalado temporal promedio de los diferentes momentos de los desplazamientos radiales de los tracers. En sistemas no autosimilares, o con diferentes zonas

⁶Cuando una partícula salta de una estructura a otra se dice que ha efectuado un vuelo o *flight* en inglés.

de autosimilaridad, el exponente ν depende del momento n . Eso puede ser debido a la falta de estadística y/o a limitaciones inherentes al propio método de cálculo. En otros casos, se puede tratar de un sistema multi-fractal. Para determinar α y β es necesario utilizar métodos un poco más elaborados.

Existen varias maneras de determinar estos exponentes, basadas en los dos formalismos explicados anteriormente. Por ejemplo, considerando el CTRW, el exponente α está relacionado con el decaimiento de la cola de la distribución de probabilidad de los saltos efectuados por las partículas transportadas [que decae como $-(1 + \alpha)$]. Así, encontrando una buena definición de lo que constituye un salto radial y un tiempo de atrapamiento (tiempo de espera) para los tracers arrastrados por la turbulencia, de la estadística de ambos se podrán deducir α y β , mientras que el exponente de transporte se calcula a partir de los primeros mediante $\nu = \beta/\alpha$.

También se puede sacar provecho del conocimiento analítico de los propagadores de las ecuaciones fraccionarias, como se mencionó al comienzo del capítulo. El propagador $G(r, t)$ proporciona la distribución de probabilidad de encontrar a tiempo t a cualquier partícula a una distancia r de su posición inicial. Estos propagadores son muy fáciles de construir numéricamente: no hay más que seguir las trayectorias de las partículas test arrastradas por la simulación y construir la distribución de probabilidad de sus desplazamientos respecto de su posición inicial en función del tiempo. Usando el hecho de que el propagador analítico de una ecuación fraccionaria con exponente espacial α ha de decaer con una cola de exponente $-(1 + \alpha)$, se puede determinar α . La anchura del propagador crece con el tiempo, dependiendo del exponente de transporte ν . Una vez determinados ambos, se obtiene el exponente temporal $\beta = \alpha\nu$.

Una tercera posibilidad, no discutida aquí en detalle pero presentada en la referencia [89], se refiere a la estadística de las velocidades Lagrangianas de los tracers. Como el exponente de transporte ν coincide con el exponente de Hurst H de la serie de velocidades Lagrangiana, puede determinarse mediante el análisis R/S de la velocidad de los tracers a lo largo de sus trayectorias. Asimismo, la distribución de probabilidad de las velocidades Lagrangianas decae como $-(1 + \alpha)$. Nuevamente, $\beta = \alpha\nu$.

Merece la pena discutir cual sería el resultado obtenido con estas técnicas si el transporte fuese difusivo. Dicho caso corresponde a los valores de los exponentes $\alpha = 2$, $\beta = 1$ y $\nu = 1/2$. En el caso del CTRW se encontraría, como ya se vio, que la distribución de probabilidad de los saltos es Gaussiana y la de los tiempos de espera exponencial. En el caso de las ecuaciones fraccionarias, se encontrarían propagadores Gaussianos, cuyas anchuras crecen con la raíz cuadrada del tiempo. En el caso del análisis de la estadística de las velocidades Lagrangianas, se encontraría que están distribuidas de acuerdo a una Gaussiana y que su exponente de Hurst es $\nu = 1/2$.

A continuación aplicaremos todas estas técnicas a la simulación numérica de nuestro sistema DTEM con dinámica SOC. Usaremos para ello los dos casos límites examinados en el capítulo anterior: el caso con difusividad nula y el caso con un canal difusivo subdominante con difusividad $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$.

6.4.1. Escalado de los desplazamientos radiales promedio en función del tiempo

Comenzamos, por tanto, determinando el coeficiente de autosimilaridad en el transporte, ν . Para ello se calculan los diferentes momentos de los desplazamientos radiales de los tracers respecto a su posición inicial en función del tiempo. Con ese objetivo, se evalúa la Ec. (6.15) para diferentes valores de n , mayores y menores que la unidad. Si la función distribución de la probabilidad (PDF) de las posiciones radiales de las partículas en diferentes tiempos no es autosimilar, el exponente ν puede ser función de n . La consideración de los diferentes momentos de la PDF nos permitirá extraer la información que buscamos acerca de las propiedades de autosimilaridad.

El mayor inconveniente que nos encontramos al estudiar la dinámica de los tracers es el tamaño finito del sistema. Este problema se acentúa debido a la existencia de partículas no atrapadas en los vórtices, que pueden realizar saltos radiales de magnitudes comparables al tamaño del sistema. Tales partículas llegarán a los límites en lapsos temporales muy cortos. Para evitar tales pérdidas, las partículas que van saliendo por la frontera son reincorporadas a la caja computacional en posiciones aleatorias, de forma que se mantienen siguiendo sus órbitas como si su posición radial careciese de límites. En este sentido, el número de tracers que se sigue permanece constante. Esta técnica permite seguir un determinado número de partículas por el tiempo que se desee, aunque genera distorsiones en los resultados que deben ser tenidas en cuenta.

Se han utilizado 2000 tracers con inicializaciones aleatorias tal como se explicó en la sección 6.2.1 y se siguen durante 10^4 pasos, que equivale a 4 tiempos de confinamiento para el caso $D_0 = 0$. Para un intervalo temporal que abarca aproximadamente dos décadas ($t > 100$), los distintos momentos de las posiciones de las partículas pueden ajustarse mediante una ley de potencias. Como ejemplo, en la Fig. 6.9 se muestran los momentos $n = 1$ y $n = 2$, obteniéndose en los ajustes $\nu = 0.77$ y $\nu = 0.705$ respectivamente. Esto es una clara indicación de que el transporte es superdifusivo. La PDF de las posiciones de los tracers en diferentes tiempos, $P(r, t)$, presenta diferente escalado en función del valor de r , es decir, no es posible realizar un único escalado del tipo $P(r, t) = t^{-\nu} F(r/t^\nu)$ para todas las posibles posiciones con el mismo valor de ν . Esta rotura de la autosimilaridad a diferentes escalas es debida a las partículas que van saliendo del sistema como consecuencia de su tamaño finito y afecta a la región de altas r 's. Por lo tanto,

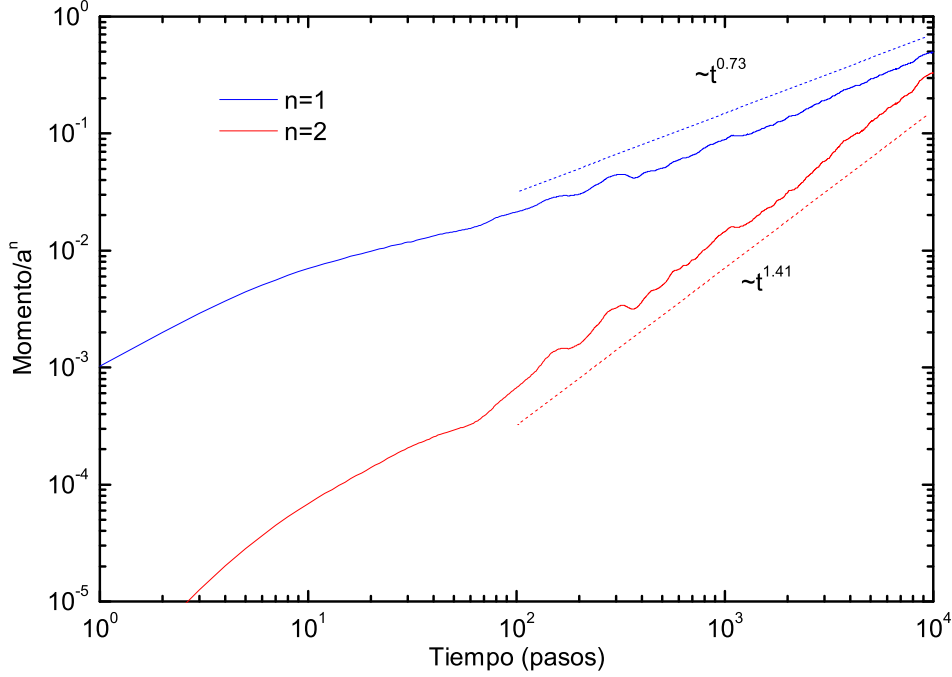


Figura 6.9: Primer y segundo momentos de los desplazamientos radiales promedio de los tracers en función del tiempo.

para estimar correctamente el valor de ν , se han calculado los diferentes momentos de la función de distribución de las posiciones radiales [Ec. (6.15)]. En la Fig. 6.10(a) se muestran los valores que toma el producto $n\nu$ en función de n . En el caso no difusivo (puntos azules) se observan dos regiones asintóticas, para valores de n bajos (se muestra ampliado) y altos. En cada caso, la información obtenida se corresponde al comportamiento dinámico para $r \lesssim a$ y $r \gtrsim a$ respectivamente.

Existen dos regiones asintóticas con distinto escalado lineal (caso $D_0 = 0$). Cuando $n \leq 2$, el ajuste da la información referente a las zonas de la PDF con r pequeño, mientras que para valores mayores que 2, la información se refiere a la zona de la función de distribución con valores de r grandes. Concretamente, para $n = 2$ se obtiene $\nu = 0.69$ mientras que con el ajuste lineal de los puntos en la zona $n \leq 2$ se obtiene globalmente $\nu = 0.7$, valores ambos muy parecidos. En cambio, cuando $n > 2$ la pendiente cambia. Por ejemplo, para $n = 20$ se obtiene $\nu = 0.55$ y del ajuste lineal de los puntos en la zona $n > 2$ se obtiene exactamente el mismo valor. Se deduce que para valores altos de n , $\nu(n)$ tiende asintóticamente a $1/2$.

El comportamiento con alta difusividad es diferente. En este caso el escalado lineal es constante, independientemente del valor de n [ver línea roja discontinua en la Fig. 6.10(a)]. El valor de la pendiente es $\nu = 0.55$, consistente con lo que se obtuvo mediante el análisis de Hurst de la función $g(t)$ en el capítulo anterior.

Para una partícula que no haya escapado fuera de los límites del sistema, la

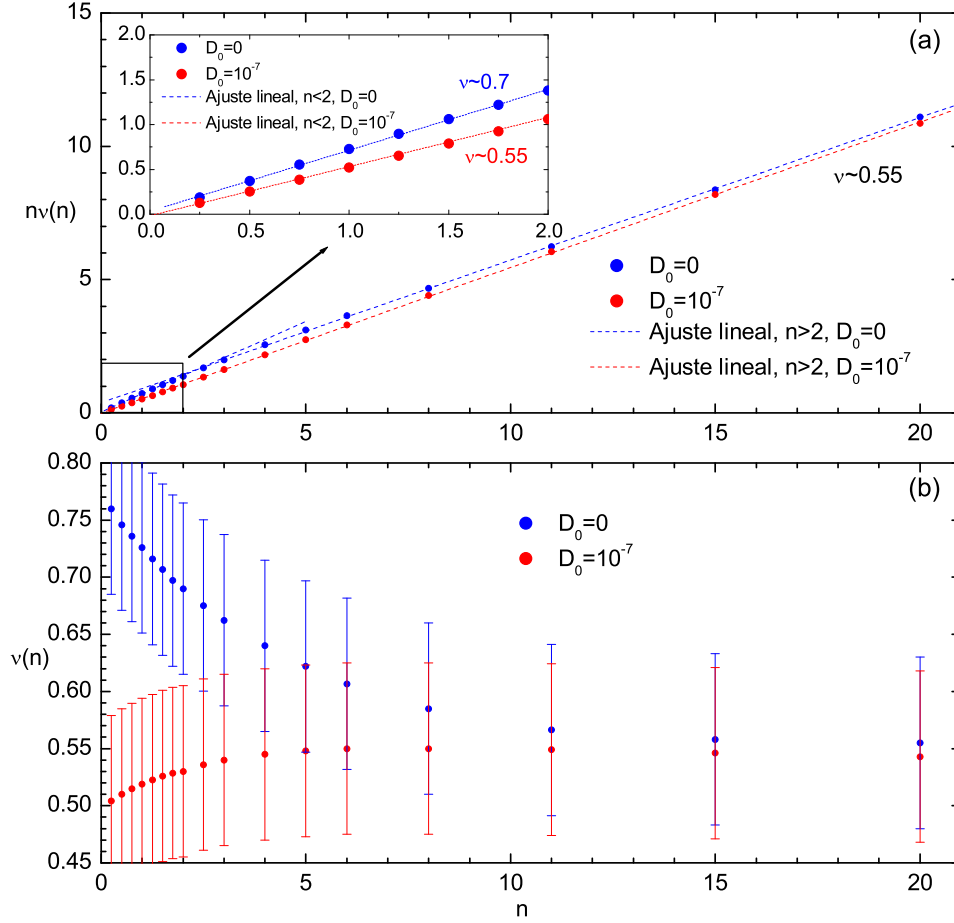


Figura 6.10: (a) Producto $n\nu(n)$ en función del momento de orden n de la distribución de los desplazamientos radiales promedio. (b) Escalado de ν con el momento de orden n .

escala radial típica de sus vuelos será del orden de su propia posición. Por lo tanto, dicha partícula no sabe todavía que existe un límite para el tamaño de dichos vuelos. Cuando se sumen los vuelos de todas las partículas, la distribución de la suma será próxima a una distribución de Lévy. Sin embargo, cuando una partícula ha salido muchas veces fuera de los límites y se ha reintegrado en otras tantas ocasiones, su posición radial efectiva⁷ cumplirá $r_{\text{eff}} \gg a$. Tal partícula conoce que la escala típica de sus vuelos es menor que r_{eff} y la distribución de sus posiciones será de Lévy pero truncada en una longitud finita. Cuando se realiza la suma sobre los vuelos, la distribución de las posiciones promedio ya no es tipo Lévy. Debido

⁷La posición radial efectiva, r_{eff} , es la posición que tendría la partícula si el sistema no fuese finito. En nuestro caso, al ser finito, cada vez que supera los límites hay que reponerla dentro de la caja computacional y por consiguiente se reinicializa su posición real.

al truncamiento, la varianza de los vuelos es finita y la función de distribución suma es gaussiana. Así, los momentos $n \gg 2$ que muestrean estas posiciones fuera de los límites ($r_{\text{eff}} > a$) deberían escalar con un índice $\nu \approx 0.5$ [Fig. 6.10(b)]. El régimen relevante para nosotros es el que verifica $n \lesssim 2$, que es el asociado a los eventos de transporte que, en promedio, están dentro de los límites. Debido al tamaño finito del sistema, no podemos inspeccionar el límite asintótico $t \rightarrow \infty$. Consideraremos escalas temporales que sean del orden del tiempo de confinamiento de las partículas.

6.4.2. Velocidades Lagrangianas

Pasamos ahora a determinar los exponentes α y ν usando la estadística de las velocidades Lagrangianas a lo largo de las trayectorias seguidas por los tracers, como describimos anteriormente. La cola de las PDFs ha de decaer como $-(1 + \alpha)$ y el exponente de Hurst de la serie nos proporciona el exponente de transporte ν .

En la Fig. 6.11 se muestran en puntos las PDFs de cuatro series de velocidades Lagrangianas (escala semilogarítmica), cada una de ellas promediada a 64 tracers, para cuatro valores diferentes de la difusividad. Además, también se muestra para cada una de ellas el ajuste a una Lévy (línea discontinua). Se observa la transición, a medida que aumenta D_0 , del comportamiento no local ($\alpha < 2$, existen correlaciones espaciales) al Gaussiano ($\alpha \rightarrow 2$, sistema espacialmente decorrelacionado). Podemos afirmar que en el caso $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, el sistema se encuentra en la frontera en que la dinámica pierde el carácter SOC y comienza a ser puramente difusiva.

En la Fig. 6.12 se muestra la dependencia del exponente de Hurst frente al tiempo. Al igual que con la actividad turbulenta $g(t)$, se observa superdifusión para el caso $D_0 = 0$. Para $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ en cambio, el exponente de Hurst encontrado ($\nu \sim 0.5$) revela difusión.

La zona autosimilar apenas abarca una década (ver líneas verticales delimitadoras), de $\tau \simeq 10 \mu s$ hasta $\tau \simeq 100 \mu s$. El ajuste debe hacerse para valores del retardo τ menores o del orden del tiempo de confinamiento, cuyo valor es $\tau_c \sim 100 \mu s$. Se aprecia la existencia de una zona de autosimilaridad con $\nu > 0.5$ cuando $D_0 < 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, mientras que para retardos mayores que el tiempo de confinamiento el valor de ν tiende a $1/2$ debido a la distorsión producida por las partículas que se salen de la caja computacional. Para $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$ la zona autosimilar abarca menos de una década puesto que el tiempo de confinamiento en ese caso es de unos $60 \mu s$. El exponente de Hurst encontrado es consistente con todos los resultados anteriores. Para retardos $\tau > 60 \mu s$ nuevamente se cumple $\nu \rightarrow 1/2$ debido a las partículas que abandonan la caja computacional.

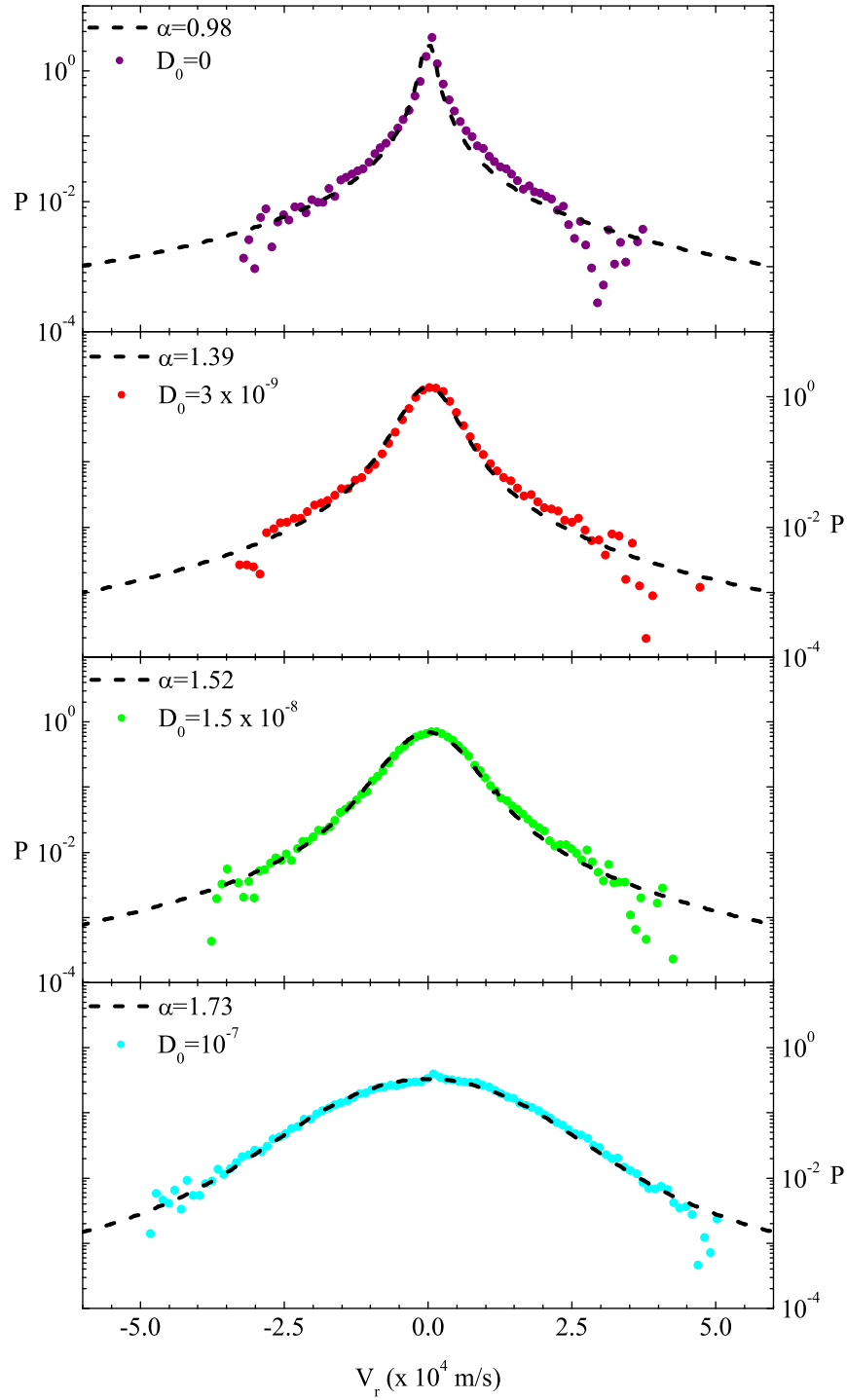


Figura 6.11: PDF promedio de las series de velocidades Lagrangianas para diferentes valores de la difusividad sobre el perfil de densidad.

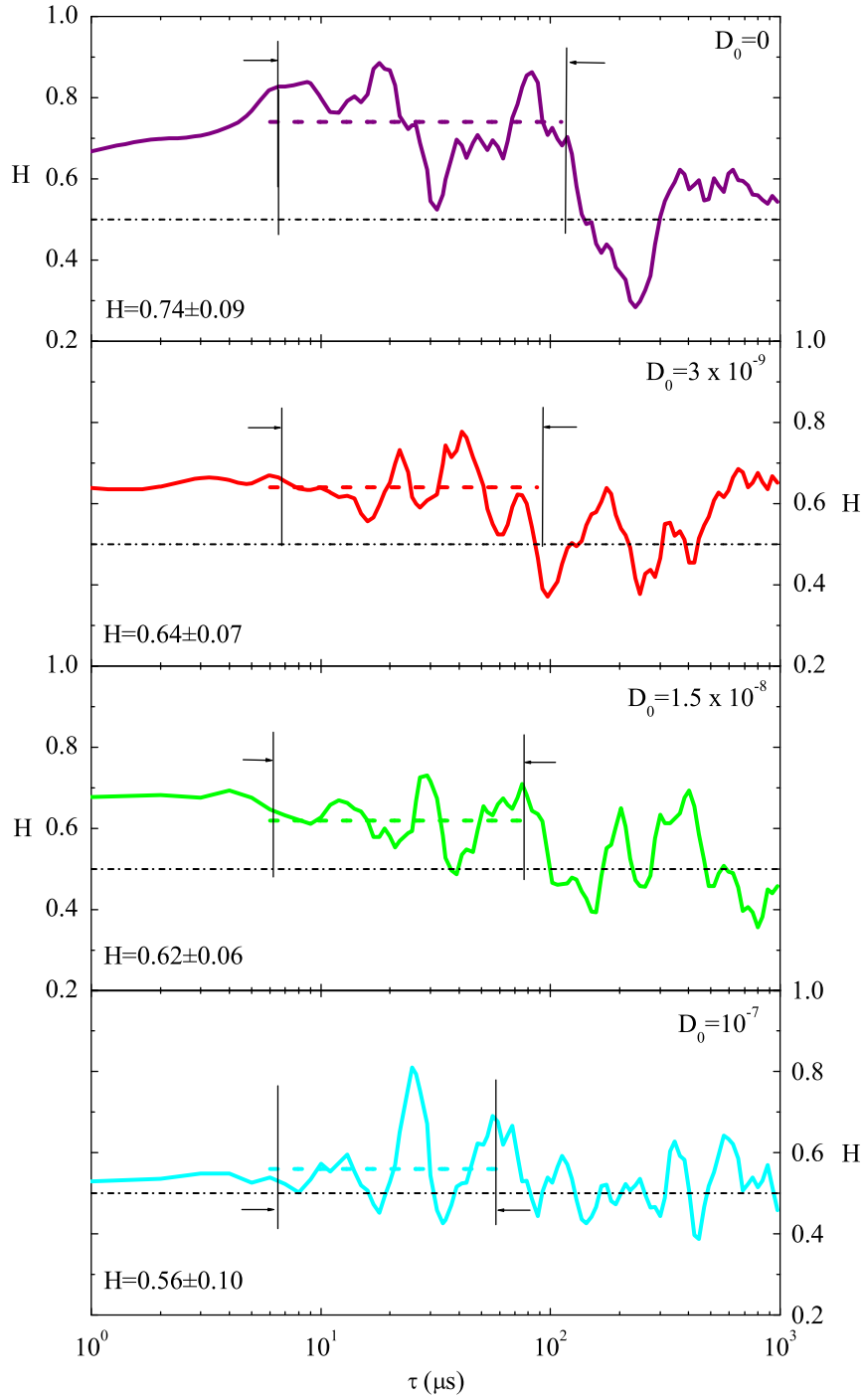


Figura 6.12: Análisis R/S de las series de velocidades Lagrangianas. Se representa en cada caso la cantidad $H \sim \frac{\tau}{R/S} \frac{d(R/S)}{d\tau}$.

6.4.3. Evolución del propagador

Nos centramos ahora en el estudio de la evolución de la PDF de los desplazamientos radiales de los tracers o propagadores. En la Fig. 6.13 se muestran los resultados para los mismos casos que en las secciones anteriores. Comparando las gráficas

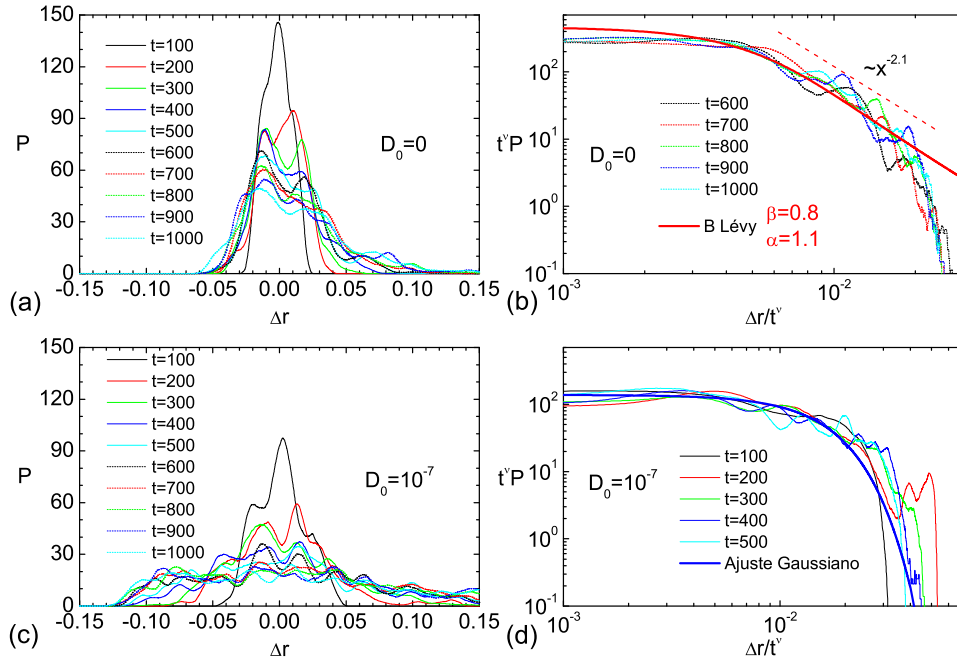


Figura 6.13: Evolución de la PDF de los desplazamientos radiales de los tracers respecto a su posición inicial. (a) $D_0 = 0$ en escala decimal. (b) PDFs rescaladas en escala log-log para $D_0 = 0$ (sólo se representan las cinco últimas y el ajuste a una Lévy). (c) $D_0 = 10^{-7}$ $a^2\Omega_i$ en escala decimal. (d) PDFs rescaladas en escala log-log para $D_0 = 10^{-7}$ $a^2\Omega_i$ (sólo se representan las cinco primeras y el ajuste a una Gaussiana).

6.13(a)-(c), se aprecia cómo para alta difusividad los tracers se expanden mucho más rápido, en consistencia con el hecho de que el tiempo de confinamiento decrece con D_0 . Fijémonos ahora en la gráfica 6.13(b). Antes de sacar conclusiones, hay que decir que sólo se representan las PDFs rescaladas en los tiempos $t \geq 600 \Delta t$. No se han representado las correspondientes a tiempos menores puesto que en esos casos los tracers todavía no han adquirido las posiciones asociadas únicamente a la dinámica inducida por el flujo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Es decir, para tiempos $t < 600 \Delta t$ las partículas test todavía tienen memoria de las condiciones iniciales. El punto temporal en que eso sucede coincide con el que en el análisis R/S de la velocidades Lagrangianas comienza la zona autosimilar con exponente $\nu \sim 0.74$. Además, se aprecia una zona, no muy ancha debido a las restricciones impuestas por el tamaño finito, en la que todas las PDFs rescaladas decaen en forma de leyes de potencia,

con exponente de decaimiento ~ 2.1 , correspondiéndose nuevamente a una Lévy de índices $\alpha \simeq 1.1$ y $\beta \simeq 0.8$ [línea roja gruesa en Fig. 6.13(b)].

En la gráfica 6.13(d) se representan las PDFs rescaladas con $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2\Omega_i$ en el intervalo temporal $t \leq 500 \Delta t$. En este caso, como la dinámica es más rápida, no hay restricciones para tiempos pequeños puesto que rápidamente los tracers se distribuyen espacialmente en base a lo que les impone el flujo turbulento, “olvidando” sus posiciones iniciales. Sin embargo, ahora la restricción la tenemos a tiempos grandes puesto que a partir de $t \sim 500 \Delta t$ gran parte de ellos han abandonado la caja computacional. En este caso no se aprecia ninguna zona en la que el escalado sea lineal (en escala log-log), sino que más bien se puede hablar de comportamiento exponencial (línea azul gruesa), tal y como se observaba en el análisis de las velocidades Lagrangianas.

6.4.4. Distribución de los vuelos

Un tercer método para estimar el índice α es el estudio de la función distribución de probabilidad (PDF) de los vuelos de los tracers a lo largo de sus trayectorias. Los vuelos se pueden definir de diferentes maneras, pero nosotros elegiremos una bastante sencilla: supondremos que una partícula realiza un vuelo cuando la componente radial de su velocidad cambia de signo. A pesar de la aparente arbitrariedad en la definición, es intuitivo darse cuenta de que cuando una partícula está avanzando de una estructura a otra, la probabilidad de que cualquier componente de la velocidad cambie de signo es bastante baja puesto que la trayectoria será básicamente recta. Si el cambio de signo se realiza durante un lapso temporal muy pequeño (equivalentemente, durante un intervalo radial muy pequeño), será debido a que está orbitando en las inmediaciones de un vórtice. En esas circunstancias el vuelo no debería considerarse como tal puesto que la partícula permanece en el mismo eddy y simplemente se estará moviendo alrededor de él, quedando los desplazamientos radiales limitados a la extensión radial de la estructura coherente. En cambio, si la partícula mantiene el signo de su velocidad radial durante un tiempo suficientemente grande, se considerará que ha cambiado de estructura y por lo tanto se habrá producido un vuelo. Si la dinámica fuese gaussiana, la probabilidad de dar grandes saltos sería muy pequeña puesto que existiría una longitud característica de vuelo. Sin embargo, si se encuentran leyes de potencia en la PDF de los vuelos, querrá decir que no existe tal longitud privilegiada y cualquier salto de cualquier magnitud, dentro de los límites impuestos por el tamaño del sistema, será posible.

En la Fig. 6.14 se muestran las PDFs de los vuelos realizados por los tracers para valores crecientes de D_0 (puntos). Junto a las PDFs de los vuelos se representan las distribuciones de Lévy (líneas discontinuas) que mejor ajustan a los puntos, teniendo en cuenta que la zona de ajuste comprende el intervalo $\Delta r/a \in [-0.15, +0.15]$. La razón por la que no se toma todo el rango de posibles saltos (los que cumplen

$|\Delta r/a| > 0.15$) es que las PDFs en esas zonas están submuestreadas debido a que muchas de las partículas que debieran ejecutar grandes saltos se salen de la caja computacional antes de poder finalizarlos.

Nuevamente, al igual que con la estadística de las velocidades Lagrangianas, se observa un cambio gradual en la dinámica a medida que aumenta D_0 , pasando de ser SOC a difusiva.

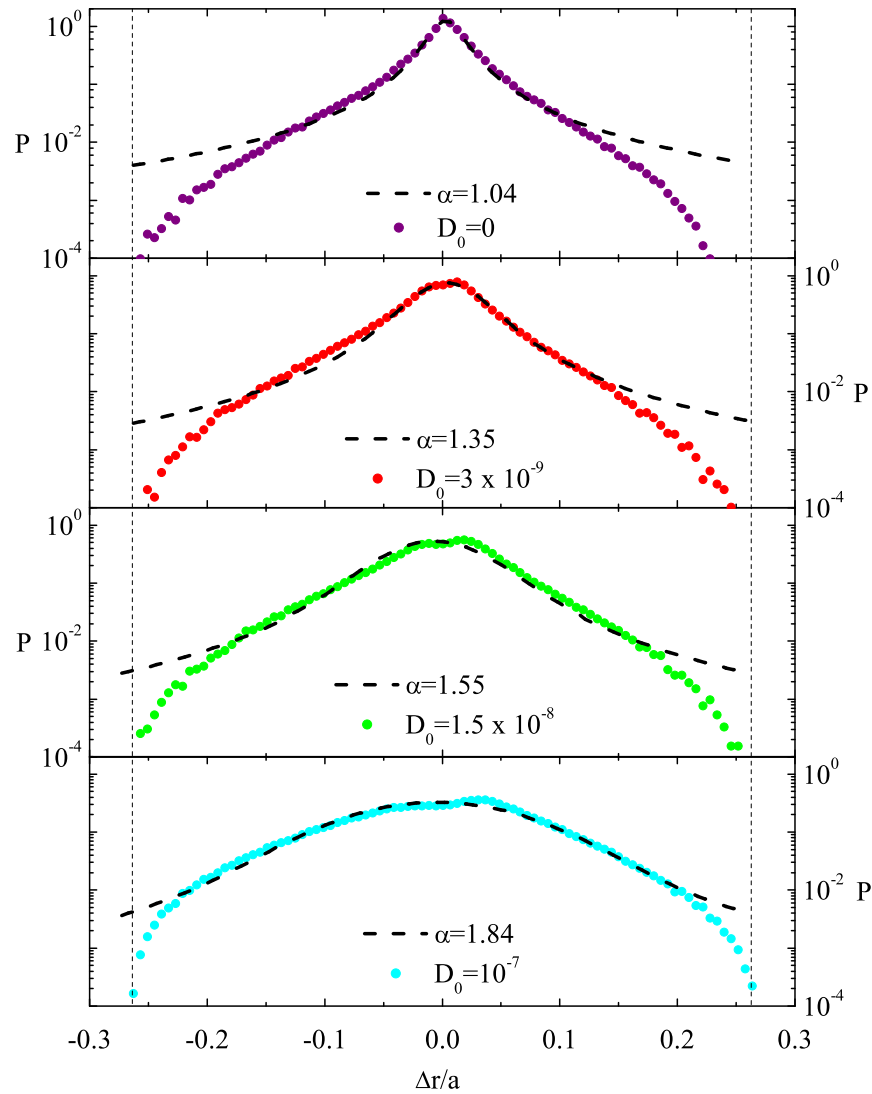


Figura 6.14: PDFs de los vuelos para diferentes valores de la difusividad sobre el perfil de densidad.

6.4.5. Interpretación

El análisis del transporte radial de partículas generado por inestabilidades tipo onda de deriva (modos DTEM) nos permite sacar las siguientes conclusiones.

En primer lugar, el estudio de los diferentes momentos de los desplazamientos radiales de los tracers ha servido para determinar el exponente de transporte ν . Para el caso $D_0 = 0$ y momentos $n \leq 2$ se obtiene $\nu \simeq 0.7$. En cambio, cuando se toman los momentos $n \geq 2$ se obtiene $\nu \simeq 0.55$. En este último caso, los tracers “ven” el tamaño limitado del sistema y su dinámica se vuelve Gaussiana, obteniéndose en el límite $n \gg 2$ valores del exponente de transporte cercanos a $1/2$. Por tanto, cuando el movimiento de los tracers envuelve escalas espaciales más pequeñas o del orden del tamaño del sistema (que se corresponde con el ajuste del exponente ν con momentos $n \leq 2$) la dinámica es tipo SOC y el transporte es por avalanchas y superdifusivo. Cuando el valor de la difusividad es tal que ya prácticamente no permite la existencia de avalanchas ($D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2\Omega_i$), el valor que se obtiene para el exponente de transporte es siempre muy aproximado a $1/2$. Cuando el exponente ν se obtiene mediante los momentos de orden $n \geq 2$ la razón por la que esto ocurre es la misma que para el caso no difusivo, pero la diferencia es que ahora para $n \leq 2$ también se obtienen valores de ν cercanos a $1/2$, si no iguales dentro del margen de error.

En segundo lugar, la existencia de correlaciones y colas algebraicas en las funciones distribución de probabilidad de diferentes cantidades, tales como velocidades Lagrangianas, propagadores y vuelos de los tracers, indica nuevamente que el transporte radial de partículas del plasma en la mesoescala es, en general, no local. Sólo cuando la difusividad sobre el perfil adquiere valores lo suficientemente grandes ($D_0 \geq 10^{-7} \text{ a}^2\Omega_i$), el transporte se vuelve puramente difusivo y desaparece la dinámica SOC. Utilizando el concepto de Continuous Time Random Walk (CTRW) y las ecuaciones diferenciales fraccionarias, es posible clasificar la dinámica de las partículas test mediante la estimación de dos parámetros esenciales. Uno es α , que caracteriza el decaimiento algebraico de la distribución de Lévy de los saltos espaciales de las partículas. El otro es β , que caracteriza el decaimiento algebraico de la distribución de Lévy de los tiempos de espera entre saltos de las partículas. En ambos casos se supone que las partículas describen, a nivel microscópico, un movimiento tipo CTRW. En el límite fluido el CTRW se convierte en una ecuación diferencial fraccionaria que describe la evolución, en la mesoescala, de la densidad promedio. El valor numérico obtenido para el exponente asociado a la derivación espacial, α , es menor que 2 para valores de la difusividad por debajo del umbral $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2\Omega_i$. Para valores mayores el comportamiento comienza a ser puramente difusivo.

Mediante el análisis de las series de velocidades Lagrangianas (sección 6.4.2) se han obtenido los índices α y ν . El primero mediante las PDFs y el segundo por medio del análisis R/S . Cuando no existe difusividad sobre el perfil se tiene que

$\alpha \simeq 1$ y $\nu \sim 0.74$, estando esto último de acuerdo, dentro del margen de error, con los valores que para el exponente de Hurst se obtuvieron en el capítulo anterior analizando las series $g(t)$. Por otro lado, se observa cómo cuando llegamos al límite $D_0 = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, el comportamiento de la PDF se vuelve Gaussiano (o casi, puesto que también se puede ajustar a una Lévy con $\alpha \sim 1.73$, siendo en cualquier caso el valor de α muy cercano a 2). El exponente de Hurst obtenido es ahora $\nu \sim 0.56$.

Los resultados obtenidos mediante los tres métodos (estadística y correlación de las series de velocidades Lagrangianas, evolución de los propagadores y estadística de los vuelos de los tracers) son consistentes y están de acuerdo con la estimación del exponente de transporte (ν) que se hizo en el capítulo anterior mediante el análisis de la actividad turbulenta, $g(t)$: la transición de la dinámica SOC a la puramente difusiva a medida que aumenta D_0 es gradual, no súbita (ver tabla 6.4).

| $D_0 \text{a}^{-2} \Omega_i^{-1}$ | 0 | 3×10^{-9} | 1.5×10^{-8} | 10^{-7} |
|-----------------------------------|------|--------------------|----------------------|-----------|
| ν | 0.74 | 0.64 | 0.62 | 0.56 |
| α | 0.98 | 1.39 | 1.52 | 1.73 |
| β | 0.73 | 0.89 | 0.94 | 0.97 |

Tabla 6.4: Valores numéricos de los exponentes fraccionarios y de transporte en función de D_0 .

Cuando no existe difusión colisional sobre el perfil, el canal turbulento es el único que actúa y la dinámica del transporte es tipo SOC: superdifusiva, no Gaussiana y no Markoviana. Esto se manifiesta en las PDFs de las velocidades Lagrangianas, propagadores y vuelos de los tracers. En cambio, para valores de D_0 en torno al límite ($D_0^{\text{crit}} = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$) y superiores, las PDFs se vuelven Gaussianas y por tanto el régimen dinámico pasa a ser difusivo, perdiéndose los efectos de memoria y no localidad espacial. Esto está de acuerdo con lo establecido en el capítulo anterior: el hecho de introducir un canal de transporte difusivo colisional hace que las propiedades SOC del sistema puramente turbulento vayan desapareciendo paulatinamente a medida que aumenta el valor de D_0 . La difusión sobre el perfil va borrando parte de la memoria y el transporte va siendo más local. Mientras el canal turbulento sea dominante frente al difusivo ($D_{\text{tur}} \gg D_0^{\text{crit}}$), siempre existirán correlaciones y memoria. Cuando esa condición deje de cumplirse ($D_{\text{tur}} \sim D_0^{\text{crit}}$), la dinámica se hará puramente difusiva.

Conclusiones y cuestiones abiertas

6.5. Conclusiones

En esta memoria se han analizado las propiedades de estabilidad y transporte de un plasma en geometría cilíndrica frente a un tipo de ondas de deriva. Se trata de modos cuyo número de onda (k_\perp) verifica $k_\perp \rho_s \ll 1$, siendo ρ_s el radio de Larmor iónico. Estos modos pueden ser desestabilizados por la colonia de electrones atrapados (modos DTEM), generándose turbulencia y transporte. Los resultados se han obtenido a partir de la resolución numérica de la ecuación de evolución de las fluctuaciones y del perfil de densidad.

En el capítulo 3 se ha realizado el análisis lineal del modelo, obteniéndose analítica y numéricamente las tasas de crecimiento y las autofunciones asociadas a los distintos modos de Fourier. Las frecuencias de rotación de los diferentes modos siguen una tendencia creciente con el número de onda poloidal m , mientras que las tasas de crecimiento presentan un máximo a partir del cual decrecen hasta hacerse estables. La presencia de un flujo poloidal de equilibrio con cizalla (shear flow) disminuye las tasas de crecimiento lineal, manteniendo inalteradas las frecuencias de rotación. La reducción en las tasas de crecimiento se debe al desplazamiento de las autofunciones lineales respecto a la posición de la superficie racional $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$, aumentando el amortiguamiento colisional iónico. Valores típicos de tasas de crecimiento y frecuencias de rotación son $10^{-4} \Omega_i$ y $10^{-3} \Omega_i$, que para un plasma de 1 Tesla y deuterio equivale a 10^3 y 10^4 s^{-1} respectivamente. La anchura radial típica de los modos es de $\sim 0.01 a$, que para un dispositivo de radio menor $a = 0.25 \text{ m}$ equivale a 2.5 mm. Según las direcciones poloidal y toroidal, los modos lineales varían lentamente.

En el capítulo 4 se describe el algoritmo numérico utilizado en la resolución de la ecuación de evolución y su implementación. Se discute la inclusión de dos términos extra que hacen más estable el método de cálculo. Por un lado la difusividad numérica $\tilde{D}_r \nabla_r^2 \tilde{n}$, que afecta a la resolución radial de las autofunciones, ha sido imprescindible para evitar acoplos entre los diferentes nodos del mallado radial. El valor numérico utilizado ha sido $\tilde{D}_r = 10^{-9} a^2 \Omega_i$, mucho menor que cualquiera de las difusividades colisionales aplicadas al perfil de densidad. Se ha comprobado que los resultados numéricos no cambian. Por otro lado, la hiperviscosidad $\mu_\perp \nabla_\perp^4 \tilde{n}$, que

afecta a la resolución espectral, era necesaria para evitar los efectos de la distorsión del espectro del número de onda radial de las autofunciones asociadas a modos estables. El valor numérico del coeficiente de este término ha sido $\mu_{\perp} = 10^{-11} \text{ a}^4 \Omega_i$. Casi no tiene efecto sobre los modos inestables, actuando únicamente sobre los estables. Esto ha permitido realizar simulaciones suficientemente largas como para poder capturar la dinámica global del transporte.

En el capítulo 5 se examina la interacción entre los canales de transporte turbulento y difusivo. Desde el punto de vista cualitativo, en ausencia de fuente externa el nivel de fluctuaciones en la fase no lineal decae exponencialmente cuando no hay difusión. Sin embargo, para valores finitos de D_0 adquiere un valor estacionario, siendo su escalado con la difusividad $\langle n^2 \rangle \sim D_0^{3/4}$. Al añadir la fuente externa para estudiar las propiedades de transporte en estado estacionario, comienzan a aparecer avalanchas. Si no existe difusividad colisional sobre el perfil, el comportamiento dinámico del sistema presenta las características asociadas a los sistemas SOC: correlaciones y memoria. Además, el transporte es superdifusivo. Para valores crecientes de la difusividad $0 < D_0 < D_0^{\text{crit}}$, el proceso de transporte viene dado por la interacción entre los canales turbulento y difusivo. Se observa una transición gradual entre el comportamiento tipo SOC y el comportamiento puramente difusivo. La difusión progresivamente va suavizando las inhomogeneidades sobre el perfil debidas a la turbulencia, borrando la memoria que en ellas se almacena. Cuando la difusividad sobre el perfil adquiere el valor crítico, $D_0 = D_0^{\text{crit}} = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, la dinámica es puramente difusiva, a pesar de que ese valor es un orden de magnitud inferior a la difusividad turbulenta promedio D_{tur} . Esto sugiere que la existencia de pequeñas difusividades sobre el perfil, mucho menores que la difusividad efectiva, puede modificar en gran medida la dinámica global de transporte y por tanto el confinamiento de calor y partículas.

En el capítulo 6 se introduce el concepto de Continuous Time Random Walk (CTRW) y las ecuaciones de transporte fraccionario como modelos alternativos, ante la imposibilidad de cualquier modelo puramente difusivo de dar explicación a toda una serie de resultados experimentales en máquinas de fusión y de resultados numéricos que sugieren un transporte de partículas y energía no local y no Markoviano. Estos modelos quedan caracterizados mediante dos exponentes. Para el CTRW, el exponente α representa el comportamiento asintótico de la PDF de los saltos de las partículas, suponiendo que se ajusta a una distribución de Lévy. En ese caso, el decaimiento de la PDF a desplazamientos grandes es algebraico, con exponente $-(1 + \alpha)$. El exponente β representa el comportamiento asintótico de la PDF de los tiempos de espera de las partículas, suponiendo que se ajusta a una distribución de Lévy. El decaimiento de la PDF a tiempos grandes es tipo algebraico, con exponente $-(1 + \beta)$. En el caso de las ecuaciones de transporte fraccionario, α representa el índice de derivación espacial y β el índice de derivación temporal. El exponente α contiene la información de la dinámica espacial ya

que mide la separación del sistema respecto al comportamiento Gaussiano. Así, $\alpha = 2$ implica procesos puramente Gaussianos. Por el contrario, $0 < \alpha < 2$ implica procesos no Gaussianos y por lo tanto no locales. El exponente β contiene la información de la dinámica temporal ya que mide la separación del sistema respecto del comportamiento Markoviano, de forma que $\beta = 1$ implica procesos Markovianos y $\beta < 1$ refleja comportamientos no Markovianos. Los valores obtenidos con diferentes diagnósticos son coincidentes. Cuando no existe difusividad sobre el perfil, el sistema es altamente no local y no Markoviano, obteniéndose $\alpha \sim 1$ y $\beta \sim 0.74$. El transporte en ese caso viene regido por una dinámica tipo SOC y es superdifusivo. En cambio, para valores de la difusividad colisional mayores que el crítico, $D_0 \geq D_0^{\text{crit}} = 10^{-7} \text{ a}^2 \Omega_i$, el sistema es local y Markoviano, con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. Se pierden las propiedades SOC y la dinámica se vuelve puramente difusiva, a pesar de seguir siendo el canal turbulento el principal responsable del transporte. Esto se debe a que la difusión colisional sobre el perfil lo hace supercrítico.

6.6. Cuestiones abiertas

El modelo de turbulencia utilizado en esta memoria se deriva de la reducción de otro más general que permite la evolución independiente de las fluctuaciones en densidad y potencial. En aquel caso no se impone la relación de Boltzmann modificada, $[\tilde{n}/n_0 = (1 + i\delta) e\tilde{\phi}/T_0]$, sólo válida en el límite cuasi-adiabático. Una evolución del presente trabajo sería hacer el estudio con el modelo de dos ecuaciones acopladas para densidad y potencial fluctuantes, a las que habría que añadir las ecuaciones de evolución de los perfiles.

Con la elección de las condiciones del plasma hecha en el capítulo 3, el intervalo radial en el que se disponen las superficies racionales cubre un intervalo radial de aproximadamente 0.23 a . Dado que la longitud de decorrelación radial de la turbulencia es de $\sim 0.01 - 0.05 \text{ a}$, tenemos una separación de escalas radial de aproximadamente una década. Equivalentemente, la mesoescala cubre aproximadamente una década según la dirección radial. Este intervalo es pequeño y hace difícil sacar conclusiones a través del análisis de las PDFs, como hemos visto en el último capítulo, puesto que sólo se dispone de una década de comportamiento autosimilar/persistente. Sería adecuado contrastar los resultados obtenidos en este trabajo en otro espacio paramétrico en el que la mesoescala comprenda al menos dos décadas en la dimensión espacial.

Los resultados no tienen en cuenta los efectos de curvatura del campo magnético puesto que la geometría utilizada es cilíndrica. En este caso, la estructura de la turbulencia no depende globalmente de la coordenada poloidal θ , a diferencia de los modos ballooning por ejemplo, para los que típicamente se observa actividad preferentemente en la zona externa, que es la zona de curvatura desfavorable de los dispositivos. Incorporar los efectos de curvatura estudiando el problema en

geometría toroidal se convierte así en otra posible vía de investigación.

En este trabajo se ha estudiado el efecto que un flujo con cizalla tiene sobre las autofunciones lineales, así como sobre las tasas de crecimiento. Una posible línea futura sería analizar el efecto que pueda tener sobre la actividad turbulenta $g(t)$ y sobre la dinámica de las partículas test.

Apéndice A

Procesos Gaussianos y procesos de Markov

A.1. Procesos Gaussianos

Sean $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N$, N variables aleatorias con valor medio no nulo. Un proceso es Gaussiano N -dimensional si su función densidad de probabilidad para todo N tiene la siguiente forma N -dimensional,

$$P_N(y_1; \dots; y_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|A|}} \exp \left(-\frac{1}{2|A|} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} (y_i - m_i)(y_j - m_j) \right), \quad (\text{A.1})$$

donde $m_i = \langle Y_i \rangle$, $|A|$ es el determinante de la matriz

$$\|A\| = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NN} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

y A_{ij} es el cofactor del segundo momento $d_{ij} = \langle (Y_i - \langle Y_i \rangle) (Y_j - \langle Y_j \rangle) \rangle$ en la matriz $\|A\|$. El cofactor A_{ij} de cada elemento d_{ij} se define como el determinante de orden $N - 1$ formado al omitir la fila i y la columna j de $\|A\|$, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Así, la densidad de probabilidad Gaussiana N -dimensional queda completamente descrita por su promedio (que se puede tomar nulo mediante el correspondiente cambio de variables) y sus segundos momentos d_{ij} .

Considerando el caso $N = 1$,

$$P_1(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|A|}} \exp \left(-\frac{A_{11}}{2|A|} y_1^2 \right), \quad (\text{A.3})$$

tenemos que $\|A\| = \|d_{11}\|$ y $|A| = d_{11}$, mientras que $A_{11} = 1$, implicando que

$$P_1(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{11}}} \exp\left(-\frac{y_1^2}{2d_{11}}\right). \quad (\text{A.4})$$

A.2. Procesos de Markov

Un proceso es de Markov cuando para su descripción no se requiere memoria. En otras palabras, el conocimiento del estado actual de un sistema que describe un proceso de Markov determina la distribución de los estados futuros. Por tanto, la información acerca del pasado es irrelevante aun cuando se disponga de ella.

Discutiremos brevemente este tipo de procesos en términos de densidades de probabilidad. Sea $Y_x(t)$ un proceso estocástico, por ejemplo, un conjunto de funciones de t etiquetadas por el parámetro x , con función de distribución $D(x)$. Usaremos mayúscula (Y) para la variable y minúscula (y) para los valores que pueda tomar.

Sea $P_1(y_1, t_1)dy_1$ la probabilidad de que $Y(t_1)$ adquiera cualquier valor en el intervalo $[y_1, y_1 + dy_1]$. Entonces se tiene que,

$$P_1(y_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[Y_x(t_1) - y_1] D(x)dx, \quad (\text{A.5})$$

donde está incluida la función δ de Dirac. Análogamente, sea $P_2(y_1, t_1; y_2, t_2)dy_1dy_2$ la probabilidad conjunta de que $Y(t_1)$ adquiera cualquier valor en el intervalo $[y_1, y_1 + dy_1]$ y simultáneamente $Y(t_2)$ adquiera cualquier valor en el intervalo $[y_2, y_2 + dy_2]$. Así, se puede definir la siguiente jerarquía de probabilidades conjuntas P_1, P_2, P_3, \dots que constituye una posible vía para describir el proceso de estocástico. Además, se pueden definir las densidades de probabilidad condicionadas en función de las densidades de probabilidad conjunta,

$$P_{n|n-1}(y_n, t_n | y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = \frac{P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n)}{P_{n-1}(y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1})}, \quad (\text{A.6})$$

donde se ha utilizado la regla de Bayes $[P(x|y) = P(x, y)/P(y)]$ y se asume que la variable t verifica $t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_2 \geq t_1$. Omitiremos en lo que sigue los índices de las probabilidades condicionadas.

La propiedad de Markov se puede expresar en términos de las probabilidades condicionadas,

$$P(y_n, t_n | y_1, t_1; \dots; y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}) = P(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}). \quad (\text{A.7})$$

Así, el estado y_{n-1}, t_{n-1} determina la densidad de probabilidad de los estados y_n, t_n , independientemente de los demás y_m, t_m con $m < n - 1$. Una densidad de

probabilidad conjunta arbitraria para un proceso de Markov se puede expresar de la siguiente manera,

$$P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) = P(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}) \dots P(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_1(y_1, t_1). \quad (\text{A.8})$$

Para los procesos de Markov, toda la información queda contenida en la función densidad de probabilidad P_2 , ya que P_1 se deriva de ella con la densidad de probabilidad condicionada P_2/P_1 a través de la regla de Bayes. En particular,

$$P(y_2, t_2; y_3, t_3 | y_1, t_1) = P(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1) P(y_2, t_2 | y_1, t_1). \quad (\text{A.9})$$

Que para procesos de Markov se convierte en,

$$P(y_2, t_2; y_3, t_3 | y_1, t_1) = P(y_3, t_3 | y_2, t_2) P(y_2, t_2 | y_1, t_1). \quad (\text{A.10})$$

En términos de las probabilidades condicionadas,

$$\begin{aligned} P_1(y_2, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_1(y_1, t_1) dy_1, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

y también

$$\begin{aligned} P(y_3, t_3 | y_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(y_2, t_2; y_3, t_3 | y_1, t_1) dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(y_3, t_3 | y_2, t_2; y_1, t_1) P(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Bajo la suposición de proceso de Markov se tiene,

$$P(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(y_3, t_3 | y_2, t_2) P(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2, \quad (\text{A.13})$$

que es la ecuación de Smoluchowski o de Chapman-Kolmogorov. En ella, se establece que la probabilidad de ir de y_1 a y_3 via y_2 es igual al producto de la probabilidad de ir de y_1 a y_2 por la probabilidad de ir a continuación de y_2 a y_3 . Las transiciones sucesivas son, por lo tanto, estadísticamente independientes. Es esencial que $t_1 < t_2 < t_3$. No se puede asumir que una densidad de probabilidad conjunta arbitraria pueda describir un proceso de Markov. Para que eso suceda, además tiene que satisfacer la Ec. (A.13).

Apéndice B

Distribuciones de Lévy

La familia de PDFs Lévy-Gnedenko comprende todas las distribuciones límite posibles que son estrictamente estables respecto a la suma de N variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas [90, 91]. La familia se define a partir de tres parámetros. Denotaremos a sus miembros mediante $P_{\alpha,\beta,\sigma}(y)$. Éstos pueden ser definidos a partir de su transformada de Fourier ($0 < \alpha \leq 2$, $|\beta| \leq 1$) [91],

$$P_{\alpha,\beta,\sigma}(k) = \exp \left\{ -\sigma^\alpha |k|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Los parámetros α, β, σ definen las propiedades de cada distribución. En primer lugar, β da una medida de la asimetría, puesto que,

$$P_{\alpha,\beta,\sigma}(y) = P_{\alpha,-\beta,\sigma}(-y). \quad (\text{B.2})$$

El parámetro β puede variar en el intervalo $-1 \leq \beta \leq 1$ para $\alpha \neq 1, 2$. Si $\alpha = 1, 2$ entonces tiene que cumplirse $\beta = 0$, pues nos limitaremos a distribuciones estrictamente estables. En segundo lugar, α da cuenta del comportamiento asintótico de la distribución para valores grandes de y . Así, para $0 < \alpha < 2$ todas las distribuciones de Lévy muestran grandes colas. Si $\alpha \neq 1$ se tiene,

$$P_{\alpha,\beta,\sigma}(y) \sim \begin{cases} C_\alpha \left(\frac{1-\beta}{2} \right) \sigma^\alpha |y|^{-(1+\alpha)}, & y \longrightarrow -\infty \\ C_\alpha \left(\frac{1+\beta}{2} \right) \sigma^\alpha |y|^{-(1+\alpha)}, & y \longrightarrow +\infty \end{cases}, \quad (\text{B.3})$$

con,

$$C_\alpha = \frac{(\alpha - 1)\alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2)}, \quad (\text{B.4})$$

siendo $\Gamma(x)$ la función Gamma de Euler. En el caso especial $\alpha = 1$, la PDF decae como $P_{1,0,\sigma}(y) \sim (\sigma/\pi) |y|^{-2}$ y cuando $\alpha = 2$ se recupera la distribución Gaussiana. Finalmente, σ es un parámetro de escala ya que,

$$P_{\alpha,\beta,\sigma}(ay) = P_{\alpha,\operatorname{sgn}(a)\beta,|a|\sigma}(y). \quad (\text{B.5})$$

B.1. Distribuciones de Lévy extremales

Una distribución de Lévy se dice extremal si el valor de su skewness es máximo: $\beta = \pm 1$ para $\alpha \neq 1, 2$. Hay que notar que, de acuerdo a (B.3), el decaimiento tipo ley de potencia solamente se dará en una de las colas en el caso de distribuciones extremales ($\beta = \pm 1$), mientras que la otra decaerá exponencialmente. En el caso $1 < \alpha < 2$, $\beta = +1$ implica que la cola exponencial está a la izquierda, $y \rightarrow -\infty$, mientras que $\beta = -1$ implica que está a la derecha, $y \rightarrow +\infty$. Para $0 < \alpha < 1$ las distribuciones extremales sólo se definen para $y > 0$ si $\beta = 1$ y para $y < 0$ si $\beta = -1$ (distribuciones *one sided*) [92]. En ese caso, la cola exponencial se encuentra en el límite $y \rightarrow 0^+$ para $\beta = +1$ y en $y \rightarrow 0^-$ para $\beta = -1$. Su transformada de Laplace viene dada por,

$$P_{\alpha,1,\sigma}(s) = \exp \left(-\frac{\sigma^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)} s^\alpha \right). \quad (\text{B.6})$$

B.2. Momentos de las distribuciones de Lévy

Otra propiedad importante de las distribuciones de Lévy es que todos los momentos de orden mayor que α tienen valor infinito,

$$\langle |x|^p \rangle = \begin{cases} \infty, & p \geq \alpha \\ [c_{\alpha,\beta}(p)]^p \sigma^p, & p < \alpha \end{cases}, \quad (\text{B.7})$$

donde el valor del coeficiente no es relevante para nuestra discusión (su valor se puede encontrar en la referencia [91]). Así, sólo la distribución gaussiana ($\alpha = 2$) tiene varianza finita. Además, las distribuciones con $\alpha \leq 1$ tienen primer momento infinito.

B.3. Expresiones explícitas de las distribuciones de Lévy

Únicamente existen tres distribuciones de Lévy para las que existe expresión analítica [91]: la distribución de Cauchy,

$$P_{1,0,\sigma}(y) = \frac{\sigma}{\pi(y^2 + \sigma^2)}, \quad (\text{B.8})$$

la distribución de Gauss,

$$P_{2,0,\sigma}(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-y^2/4\sigma^2}, \quad (\text{B.9})$$

y la distribución de Lévy,

$$P_{1/2,1,\sigma}(y) = \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{y^{3/2}} e^{-\sigma/2y}. \quad (\text{B.10})$$

Apéndice C

Operadores diferenciales fraccionarios

Los operadores diferenciales fraccionarios de Riemann-Liouville se definen explícitamente mediante los siguientes operadores integrales [93, 94],

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha f(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{dx^p} \left[\int_a^x \frac{f(x') dx'}{(x-x')^{\alpha-p+1}} \right], \\ {}^b D_x^\alpha f(x) &\equiv \frac{-1}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{d(-x)^p} \left[\int_x^b \frac{f(x') dx'}{(x'-x)^{\alpha-p+1}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

En estas expresiones, $\Gamma(x)$ es la función Gamma de Euler y p es la unidad más la parte entera de α . a y b son los llamados puntos de inicio y fin del operador respectivamente. Cuando a o b se extiendan hasta infinito se usa la notación,

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} &\equiv {}_{-\infty} D_x^\alpha f(x), \\ \frac{d^\alpha f}{d(-x)^\alpha} &\equiv {}^{+\infty} D_x^\alpha f(x). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Estos operadores son interesantes porque satisfacen, bajo la transformación de Fourier [93, 94],

$$\begin{aligned} F \left[\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \right] &\equiv (-ik)^\alpha f(k), \\ F \left[\frac{d^\alpha f}{d(-x)^\alpha} \right] &\equiv (ik)^\alpha f(k). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Otro operador fraccionario útil es el llamado operador diferencial fraccionario de Riesz [93, 94]. Se define mediante la simetrización,

$$\frac{d^\alpha}{d|x|^\alpha} \equiv -\frac{1}{2 \cos(\pi\alpha/2)} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha}{d(-x)^\alpha} \right]. \quad (\text{C.4})$$

El operador de Riesz verifica, bajo la transformación de Fourier,

$$F \left[\frac{d^\alpha f}{d|x|^\alpha} \right] = -|k|^\alpha f(k), \quad (\text{C.5})$$

que se obtiene a partir de las Ecs. (C.3), aplicando la identidad compleja,

$$(-ik)^\alpha + (ik)^\alpha = 2|k|^\alpha \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right). \quad (\text{C.6})$$

Finalmente, el operador diferencial fraccionario de Caputo se define como sigue [95],

$$\frac{d_c^\gamma f}{d_c x^\gamma}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma - p)} \int_0^x \frac{d^p f}{d x^p}(x') \frac{d x'}{(x - x')^{\gamma - p + 1}}, \quad (\text{C.7})$$

siendo p la unidad más la parte entera de γ . La derivada fraccionaria de Caputo se asocia generalmente a derivadas temporales. La necesidad de tener que definir una derivada fraccionaria nueva cuando se deriva respecto al tiempo (en lugar de utilizar el operador de Riemann-Liouville con punto de inicio en $t = 0$) tiene que ver con el hecho de que la transformada de Laplace de la derivada de Caputo verifica [93, 94],

$$L \left[\frac{d_c^\gamma f}{d_c t^\gamma}(t) \right] = s^\gamma f(s) - \sum_{k=0}^{p-1} s^{\gamma - k - 1} \frac{d^k f}{dt^k}(0), \quad (\text{C.8})$$

que depende solamente de los valores iniciales de $f(t)$ y sus derivadas enteras. En cambio, la transformada de Laplace de ${}_0D_t^\gamma f(t)$ depende de $f(t)$ y de los valores iniciales de las derivadas fraccionarias de orden menor que γ , lo que no tiene un significado físico claro en el caso de aplicaciones reales [93, 94]. La relación entre las derivadas de Riemann-Liouville y de Caputo viene dada por [93],

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{d_c^\alpha f}{d_c t^\alpha} + \frac{t^{-\gamma} f(0)}{\Gamma(1 - \gamma)}. \quad (\text{C.9})$$

Bibliografía

- [1] R. Aymar, P. Barabaschi y Y. Shimomura, Plasma Phys. Control. Fusion **44**, 519 (2002).
- [2] J. Sheffield, Rev. Mod. Phys. **66**, 1015 (1994).
- [3] J. D. Lawson, Proc. Phys. Soc. B **70**, 6 (1957).
- [4] K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1980.
- [5] L. Spitzer Jr., Phys. Fluids **1**, 253 (1958).
- [6] J. A. Phillips, Los Alamos Science, Volumen 4, Número 7, Invierno/Primavera 1983.
- [7] T. K. Fowler, Nucl. Fusion **9**, 3 (1969).
- [8] I. A. Artsimovich, Nucl. Fusion **12**, 215 (1972).
- [9] J. A. Wesson, Nucl. Fusion **29**, 641 (1989).
- [10] The JET Project-Design Proposal: EUR-JET-R5 (1976).
- [11] A. Iiyoshi et al., Fus. Tech. **17**, 169 (1990).
- [12] C. Beidler et al., Fus. Tech. **17**, 149 (1990).
- [13] C. Alejaldre et al., Fus. Tech. **17**, 131 (1990).
- [14] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press, 1987.
- [15] F. L. Hinton y R. D. Hazeltine, Rev. Modern Phys. **48** 239 (1976).
- [16] S. P. Hirshman y D. Sigmar, Nucl. Fusion **21** 1089 (1981).
- [17] C. Mercier, Nucl. Fusion **1**, 47 (1960).
- [18] J. M. Greene y J. L. Johnson, Plasma Physics **10**, 729 (1968).

-
- [19] W. Horton, Rev. Modern Phys. **71** 3, 735 (1999).
 - [20] D. Dobrott, Phys. Rev Lett. **39**, 943 (1997).
 - [21] M. Kruskal y J. L. Tuck, Proc. R. Soc. A **245**, 222 (1958).
 - [22] V. D. Shafranov, At. Energ. **5**, 38 (1956).
 - [23] P. H. Rutherford, Phys. Fluids **16**, 1903 (1973).
 - [24] B. A. Carreras, IEEE Trans. Plasma Science **25**, 1281 (1997).
 - [25] S. Hamugachi y W. Horton, Plasma Phys. Control. Fusion **34**, 203 (1992).
 - [26] B. G. Hong, F. Romanelli y M. Ottaviani, Phys. Fluids B **3**, 615 (1991).
 - [27] R. J. Goldston, Plasma Phys. Control. Fusion **26**, 87 (1984).
 - [28] R. R. Parker et al., Nucl. Fusion **25**, 1127 (1985).
 - [29] R. E. Waltz, Phys. Fluids **28**, 577 (1985).
 - [30] G. G. Craddock et al., Phys. Plasmas **1**, 1877 (1994).
 - [31] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum-Press, New York, London, 1974.
 - [32] P. Terry y W. Horton, Phys. Fluids **25**, 491 (1982).
 - [33] L. D. Landau, J. Phys. (Moscow) **10**, 25 (1946).
 - [34] A. Hasegawa y K. Mima, Phys. Rev. Lett. **39**, 205 (1977).
 - [35] B. A. Carreras et al., Phys. Fluids B **4**, 3115 (1992).
 - [36] B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse, Sov. Phys. JETP **24**, 1172 (1967).
 - [37] T. M. Antonsen Jr. y B. Lane, Phys. Fluids **23**, 1205 (1980).
 - [38] E. A. Frieman y L. Chen, Phys. Fluids **25**, 502 (1982).
 - [39] H. Furth, J. Killen y M. Rosenbluth, Phys. Fluids **6**, 77 (1963).
 - [40] <http://www.ciemat.es/portal.do?TR=C&IDR=683>
 - [41] L. Garcia et al., J. Comput. Phys. **65**, 253 (1986).
 - [42] E. A. Coutias et al., Physica Scripta **40**, 270 (1989).

-
- [43] H. R. Hicks et al., J. Comput. Phys. **44**, 46 (1981).
- [44] R. L. Burden and J. D. Faires. *Análisis numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica (1985).
- [45] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons (1991).
- [46] S. K. Lele, J. Comput. Phys. **103**, 16 (1992).
- [47] J. A. Mier, L. García y R. Sánchez, Phys. Plasmas **13**, 102308 (2006).
- [48] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
- [49] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*. Academic Press, San Diego (1988).
- [50] D. E. Newman et al. Phys. Plasmas **3**, 1858 (1996).
- [51] P. H. Diamond y T. S. Hahm, Phys. Plasmas **2**, 3640 (1995).
- [52] B. A. Carreras et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4438 (1998).
- [53] R. O. Dendy y P. Helander, Plasma Phys. Control. Fusion **39**, 1947 (1997).
- [54] B. A. Carreras et al., Phys. Plasmas **3**, 2903 (1996).
- [55] T. Hwa y M. Kadar, Phys. Rev. A **45**, 7002 (1992).
- [56] L. P. Kadanoff et al., Phys. Rev. A **39**, 6542 (1989).
- [57] R. Sánchez, D. E. Newman y B. A. Carreras, Nucl. Fusion **41**, 247 (2001).
- [58] D. E. Newman, R. Sánchez, B. A. Carreras, y W. Ferenbaugh, Phys. Rev. Lett. **88**, 204304 (2002).
- [59] X. Garbet y R. E. Waltz, Phys. Plasmas **5**, 2836 (1998).
- [60] X. Garbet et al., Nucl. Fusion **39**, 2063 (1999).
- [61] R. Woodard et al., Physica A **373**, 215 (2007).
- [62] B. B. Mandelbrot y J. R. Wallis, Water Resour. Res. **5**, 967 (1969).
- [63] H. E. Hurst, Trans. Am. Soc. Civ. Eng. **116**, 770 (1951).
- [64] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 945 (1968).
- [65] S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **41**, 363 (1970).

- [66] W. W. Lee, J. Comput. Phys. **72**, 243 (1987).
- [67] R. D. Sydora, Phys. Fluids B **2**, 1445 (1990).
- [68] A. J. Wooton et al., Phys. Fluids B **2**, 2879 (1990).
- [69] C. Bourdelle, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, A317 (2005).
- [70] A. S. Monim y A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press, Cambridge, MA, (1975).
- [71] W. D. McComb, *Theory of Fluid Turbulence*. Oxford University Press, Oxford, (1990).
- [72] J. D. Callen y G. Jahns, Phys. Rev. Lett. **38**, 491 (1977).
- [73] T. C. Luce, C. C. Petty y J. M. C. de Haas, Phys. Rev. Lett. **68**, 52 (1992).
- [74] K. W. Gentle et al., Phys. Plasmas **2**, 2292 (1995).
- [75] B. A. Carreras et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4438 (1998).
- [76] M. A. Pedrosa et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3621 (1999).
- [77] R. Sánchez, D. E. Newman y B. A. Carreras, Phys. Rev. Lett. **88**, 068302 (2002).
- [78] R. Sánchez et al., Phys. Rev. Lett. **90**, 185005 (2003).
- [79] P. A. Politzer, Phys. Rev. Lett. **84**, 1192 (2000).
- [80] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*. Pergamon, New York, (1972).
- [81] E. W. Montroll y G. H. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
- [82] V. M. Krenke, E. W. Montroll y M. F. Shlesinger, J. Stat. Phys. **9**, 45 (1973).
- [83] R. Metzler y J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
- [84] Y. Sarazin y Ph. Ghendrih, Phys. Plasmas **5**, 4214 (1998).
- [85] B. A. Carreras et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 3653 (1999).
- [86] A. Compte, Phys. Rev. E **53**, 4191 (1996).
- [87] G. M. Zaslavsky, Phys. Rep. **371**, 461 (2002).
- [88] R. Sánchez, B. A. Carreras y B. Ph. Milligen, Phys. Rev. E **71**, 011111 (2005).

-
- [89] R. Sánchez et al., Phys. Rev. E **74**, 016305 (2006).
 - [90] B. V. Gnedenko y A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley, Reading, MA (1954).
 - [91] G. Samorodnitsky y M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*. Chapman & Hall, New York (1994).
 - [92] R. Gorenflo, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Wien (1997).
 - [93] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York (1998).
 - [94] K. Oldham y J. Spanier, *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York (1974).
 - [95] M. Caputo, J. R. Astron. Soc. Can. **13**, 529 (1967).

Publicaciones

Publicaciones en las que se han presentado los resultados desarrollados en esta tesis

1. “Critical dynamics of drift-wave turbulence in cylindrical geometry”, **J. A. Mier**, L. García y R. Sánchez (Proc. de la 31^a Conferencia EPS, Londres, 2004), Vol. 28G, P-4.174 (2004).
2. “Perturbative studies in DTEM subcritical turbulence for plasma confinement”, **J. A. Mier**, L. García y R. Sánchez (Proc. de la 32^a Conferencia EPS, Tarragona, 2005), Vol. 29C, P-5.034 (2005).
3. “Non-diffusive features of near-critical DTEM-turbulence in the presence of a subdominant diffusive transport channel”, **J. A. Mier**, L. García, R. Sánchez y D. E. Newman (Proc. de la 34^a Conferencia EPS, Varsovia, 2007), Vol. 31F, P-4.058 (2007).
4. “Study of the interaction between diffusive and avalanche-like transport in near-critical dissipative-trapped-electron-mode turbulence”, **J. A. Mier**, L. García y R. Sánchez en Physics of Plasmas **13**, 102308 (2006).
5. “Non-diffusive modeling of scale-free transport in magnetically-confined, turbulent plasmas”, aceptado para publicación en: “Proceedings of Conference: Chaos, Complexity and Transport: Theory and Applications, Marseilles 2007”, publicado por World Scientific, R. Sánchez, D. E. Newman, B. A. Carreras, **J. A. Mier**, L. García, J. N. Leboeuf, V. Decyk and B. Ph. van Milligen.
6. “Overview of recent results regarding the appearance of non-diffusive behaviour in fluid and gyrokinetic (PIC) turbulent codes”, charla y póster en la US-EU Joint Task Transport Force 2007, San Diego, California, U.S.A., 17–20 Abril 2007, R. Sánchez, B. A. Carreras, V. Decyk, L. García, J. N. Leboeuf, **J. A. Mier** y D. E. Newman.
7. “Non-diffusive features of near-critical DTEM-turbulence in the presence of a subdominant diffusive transport channel”, póster en la US-EU Joint

Task Transport Force 2007, San Diego, California, U.S.A., 17–20 Abril 2007, **J. A. Mier**, L. García, R. Sánchez y D. E. Newman.

8. “Nondiffusive transport in plasma turbulence”, L. García, **J. A. Mier**, R. Sánchez, B. A. Carreras, I. Calvo y D. E. Newman (Proc. de la 35^a Conferencia EPS, Creta, 2008), a ser publicado.
9. “Characterization of non-diffusive transport in plasma turbulence via the Lagrangian method”, en preparación (Phys. Rev. Lett., 2008), **J. A. Mier**, R. Sánchez, L. García, B. A. Carreras y D. E. Newman.
10. “Features of tracer transport in near-critical dissipative-trapped-electron-mode turbulence: effect of a subdominant diffusive channel”, en preparación (Physics of Plasmas, 2008), **J. A. Mier**, R. Sánchez, L. García y D. E. Newman.

Otras publicaciones

- “Dynamics of high energy runaway electrons in the Frascati Tokamak Upgrade”, B. Esposito, J. R. Martín-Solís, F. M. Poli, **J. A. Mier**, R. Sánchez y L. Panaccione en Physics of Plasmas **10**, 2350 (2003).